



DISTRIBUTIONS ET CORRÉLATIONS HADRONIQUES EN CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE DANS L'APPROXIMATION DES "PETIT X"

Redamy Perez-Ramos

► To cite this version:

Redamy Perez-Ramos. DISTRIBUTIONS ET CORRÉLATIONS HADRONIQUES EN CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE DANS L'APPROXIMATION DES "PETIT X". Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2006. Français. NNT: . tel-00108167

HAL Id: tel-00108167

<https://theses.hal.science/tel-00108167>

Submitted on 19 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET HAUTES ÉNERGIES

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

présentée par

M. Redamy PEREZ RAMOS

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VII

Sujet :

***DISTRIBUTIONS ET CORRÉLATIONS HADRONIQUES
EN CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE
DANS L'APPROXIMATION DES “PETITS X”***

Soutenue le 19 septembre 2006 devant le jury composé de :

MM.	Yuri DOKSHITZER,	directeur de thèse,
	Valéry KHOZE,	rapporteur,
	Bruno MACHET,	
	Giuseppe MARCHESINI,	rapporteur,
	Philippe SCHWEMLING,	
&	Jean-Bernard ZUBER.	

Table des matières

1	<i>Remerciements</i>	5
2	<i>Agradecimientos</i>	7
3	Introduction	9
3.1	Comparaison avec les travaux précédents	12
4	Rayonnement mou en électrodynamique quantique (classique). Extension à la chromodynamique quantique	13
4.1	Courant d’accompagnement mou d’une particule chargée ; méthode quantique	13
4.2	Considérations classiques sur le rayonnement ; accélération instantanée infinie	15
4.2.1	Densité \mathcal{N} du nombre de photons rayonnés	17
4.3	Accélération finie : deux cas simples	19
4.3.1	Un premier cas de trajectoire rectiligne : plateau de largeur infinie .	19
4.3.2	Un deuxième cas de trajectoire rectiligne : plateau de largeur finie .	21
4.4	Trajectoire arbitraire	23
4.4.1	Courant dans le référentiel où $\mathbf{k}'_{\parallel} = 0$, direction arbitraire	26
4.5	Section efficace du rayonnement mou	27
4.6	Introduction à la cohérence	28
4.6.1	Le rôle de l’interférence ; contrainte sur les angles d’émission . . .	29
4.7	Interprétation de la contrainte sur les angles d’émission de photons en mécanique quantique relativiste	30
4.8	Rayonnement de bremsstrahlung en CDQ	31
4.9	Application à l’identification des canaux possibles dans la production du boson de Higgs [21]	33
5	Approximation Doublement Logarithmique (DLA)	35
5.1	Amplitudes multi-gluoniques à l’ordre des arbres pour la collision $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + Ng$ (N = nombre de gluons mous colinéaires rayonnés) .	35
5.2	Amplitude du processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g_1g_2$	37
5.3	Contrainte angulaire pour $N = 2$ (nombre de gluons rayonnés)	41
5.4	Contrainte angulaire à tous les ordres	43
5.5	Section efficace du processus et introduction du facteur de forme de Sudakov	51
5.6	Méthode de la Fonctionnelle Génératrice [5]	52
5.6.1	Fonctionnelle Génératrice pour les jets de quarks et de gluons . . .	54
5.6.2	L’Équation Maîtresse (EM)	55
5.7	Spectre inclusif d’une particule p dans un jet	58
5.7.1	Solution de l’équation (5.68) pour α_s constant. Transformée de Mellin et “Hump-Backed plateau”	59
5.7.2	Dérivées logarithmiques (utiles pour l’article C.2 et C.3)	61
5.8	Distribution doublement différentielle inclusive et distribution angulaire inclusive de la particule détectée	61
5.9	Multiplicités des jets et interprétation de la dimension anormale	62
5.9.1	Corrélateurs des multiplicités	63
5.9.2	Multiplicité moyenne des partons	63

5.9.3	Solution de l'équation (5.85) pour $y + \lambda, \lambda \gg 1$	64
5.10	Représentation intégrale du spectre dans l'espace de Mellin; cas $\alpha_s(k_\perp)$ variable	64
5.11	Estimation du spectre par la méthode du col [19]	66
5.11.1	Deux limites utiles	71
5.11.2	Remarque concernant les articles C.2 et C.3	71
6	Corrélations en énergie entre deux gluons mous produits dans un jet initié par un gluon ou un quark dans le cadre DLA	71
6.1	Solution de l'équation (6.4)	74
6.1.1	Solution de l'équation (6.4) avec α_s variable	76
6.1.2	Ordre de grandeur des corrections (voir aussi le paragraphe 4.2 de C.2)	76
6.2	Approximation de Fong & Webber [12] en DLA (voir aussi [7])	77
6.3	Conclusions et motivations	78
7	Approximation Logarithmique Dominante Modifiée (MLLA)	79
7.1	Corrections en logarithmes simples (SL) aux cascades DLA	79
7.1.1	Estimation de $\gamma(\alpha_s)$	80
7.2	Probabilité de désintégration partonique dans le cadre MLLA	82
7.3	Equation Maître dans le cadre de l'approximation MLLA	83
7.3.1	Facteurs de forme de Sudakov en MLLA	83
7.3.2	Condition initiale et normalisation	84
7.4	Lien entre (7.19) et les équations de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) des fonctions de fragmentation partonique	85
7.4.1	Cinématique "DIS", variable de Bjorken	85
7.4.2	Equations d'évolution	86
8	Compléments des articles	90
8.1	Inclusive hadronique distributions inside one jet at high energy colliders at "Modified Leading Approximation" of Quantum Chromodynamics C.1	90
8.1.1	Corrélation entre deux particules produites dans l'annihilation e^+e^- [24][25]	90
8.1.2	Espace de phase dans (8.4)	92
8.1.3	Calcul des termes intervenant dans l'expression du courant de couleur	93
8.1.4	Comparaison des prédictions avec les résultats préliminaires de CDF	93
8.2	Two-particle correlations inside one jet at "Modified Leading Logarithmic Approximation" of Quantum Chromodynamics I : Exact solution of the evolution equations at "small x ", C.2	94
8.2.1	Comparaison entre les corrélations en DLA et MLLA, appendice F	95
8.3	Two-particle correlations inside one jet at "Modified Leading Logarithmic Approximation" of Quantum Chromodynamics ; II : Steepest descent evaluation of the single inclusive distribution at small x , C.3	95
8.3.1	Spectre inclusif d'une particule en MLLA ; méthode du col	95
8.3.2	Dérivées logarithmiques obtenues par la méthode du col (utile pour la paragraphe 2.4 de C.3)	97
8.4	Vérification des équations (5.68) et (8.7) par la solution du col	100
8.4.1	Application au cas des corrélations entre deux particules	101
8.4.2	Résultats de la méthode du col	102
8.4.3	Résultats de C.3 pour les corrélations,	102

9	Conclusions	104
A	Rayonnement en électrodynamique classique et en chromodynamique quantique	106
A.1	Calcul concernant 4.3.2	106
A.2	Calculs concernant 4.6 (Angular Ordering)	106
A.3	Production du boson de Higgs	108
B	Compléments utiles pour le chapitre 5	109
B.1	Dérivées secondes $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu}$ et expression du déterminant $Det A$ en fonction de ω, ν	109
B.2	Astuce pour la méthode du col	110
C	Articles	111
C.1	Inclusive hadronic distributions inside one jet at high energy colliders at “Modified Leading Logarithmic Approximation” of Quantum Chromodynamics	111
C.2	Two-particle correlations inside one jet at “Modified Leading Logarithmic Approximation” of Quantum Chromodynamics ; I : Exact solution of the evolution equations at small x	149
C.3	Single inclusive distribution and 2-particle correlations inside one jet at “Modified Leading Logarithmic Approximation” of Quantum Chromodynamics ; II : Steepest descent evaluation at small x	201

1 *Remerciements*

Je ne saurais terminer l'écriture de cette thèse sans remercier tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont aidé à la réaliser.

Je commence par adresser mes remerciements ainsi que toute ma reconnaissance aux premiers enseignants que j'ai eus en physique quand je suis arrivé en France, il y a six ans maintenant.

Je voudrais remercier plus spécialement Alain Laverne pour ses corrections et discussions sur le premier chapitre de cette thèse, Galliano Valent pour ses cours de licence et de maîtrise, Jose Ocariz pour tous ses encouragements pendant mon stage de DEA au LPNHE, et pour m'avoir fortement poussé vers la physique théorique, Pierre Gazeau pour son soutien, Maurice Courbage ainsi que Philippe Schwemling pour m'avoir donné les premières notions en physique des particules pendant les années de licence et de maîtrise.

Je remercie l'ensemble des enseignants du DEA de physique théorique de l'Ecole Normale Supérieure, en particulier, Costas Bachas, Pierre Fayet, Christophe Schweigert et sa très gentille secrétaire Nicole Ribet.

Il y a d'autres personnes comme Jacques Chauveau, Lydia Ross et l'équipe expérimentale *BaBar* du LPNHE qui, d'une manière indirecte, ont également joué un rôle dans ma carrière. Je remercie bien sûr Yuri Dokshitzer qui m'a accepté comme étudiant sans aucune contrainte. Je lui suis reconnaissant pour son savoir, pour son intuition physique stupéfiante ainsi que pour m'avoir donné un sujet intéressant où il reste encore énormément de progrès à faire. Je le remercie également pour sa disponibilité, pour ses exigences qui approchent la perfection, ainsi que pour avoir toujours répondu à mes questions.

Je remercie Bruno Machet car il a été mon plus proche collaborateur. Grâce à lui et à l'aide de Yuri, j'ai publié mes premiers articles en Chromodynamique Quantique. C'est par cette collaboration et ses conseils que j'ai appris à organiser mes idées, à travailler plus efficacement, à écrire mes résultats et à réussir enfin à nager dans cette mer qu'est la physique théorique. Je lui suis aussi très reconnaissant car c'est lui qui m'a aidé à mener à bien l'ensemble des démarches administratives qui ont précédé la soutenance de cette thèse. Il a de même joué un rôle très important pendant que je rédigeais ce mémoire, par ses conseils concernant la mise en place des idées et par ses corrections de mes fautes de français.

Je remercie Gavin Salam pour son soutien précieux en informatique. Sans son aide je serais difficilement arrivé à finir à temps tous les programmes que j'ai dû rédiger en Fortran-90. Je le remercie pour sa disponibilité ainsi que pour nos discussions en QCD.

Je remercie de même François Arléo pour ses encouragements et nos discussions tout au long de cette thèse.

Je remercie l'ensemble du LPTHE, plus spécialement, ses deux directeurs Laurent Baulieu et Olivier Babelon. C'est en effet un laboratoire dans lequel je me suis senti très bien accueilli depuis mon arrivée. J'adresse l'expression de toute ma reconnaissance aux secrétaires Marie-Christine Lévy, Annie Richard, Sylvie Dalla Foglia et Valérie Sabourot. J'ai toujours bénéficié d'excellentes conditions de travail et d'un matériel informatique de qualité. À ce sujet, j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à Marco Picco, Elysée Macagny et à Damien Brémont. Je dois de même toute ma reconnaissance à Denis Bernia qui m'avait toujours encouragé et aidé quand il fallait relier des brochures scientifiques.

Il y a aussi bien sûr tous mes collègues et amis thésards du LPTHE, LPT-Orsay, LPT-ENS. J'adresse mes remerciements à Kyril Kazymirenko, Bruno Durin, Nicolas Couchoud, Pedro

Bordalo, Guillaume Bossard, Alexis Martin, Yacine Dolivet, Jean Savinien, Alexey Lokhov, Quentin Duret, Benoît Estienne, Emmanuel Série, Hamed Ben Yahia et au postdoc Francesco Bigazzi.

Je crois qu'un petit mot est dû à Michel Boîteux qui m'a très bien intégré dans l'enseignement supérieur au Centre Universitaire des Saint-Pères, et qui m'a fait le plaisir et l'honneur de venir assister à ma soutenance.

Je remercie bien sûr les membres du jury pour leur soutien, leur encouragement, et la confiance en moi même qu'ils m'ont donné pour la soutenance. Je dois une gratitude particulière à mes deux rapporteurs qui se sont déplacés d'Italie et d'Angleterre.

Et il y a enfin tous ceux vers qui je tourne mon affection, amitié et confiance ; que chacun s'y reconnaisse car c'est à eux que j'adresse ces quelques années de travail et d'effort.

2 *Agradecimientos*

En Cuba, quiero en especial agradecer a mis padres Pedro y Susana que siempre me apoyaron desde pequeño, y sobre todo, mientras cursaba mis estudios en el Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares de La Habana ; a mis abuelos Ramiro y Maximina que siempre estuvieron a mi lado, también recuerdo a mi familia, a tíos como Lázaro y Rosa ; es a ellos a quienes en este párrafo, con mas amor y afecto, dedico este trabajo de doctorado.

Vale la pena mencionar y recordar a mi maestra Margarita Oliva, a mi gran maestro de matemáticas de noveno grado Nelson Zúñiga y a mi exelente profesor de física en el IPVCE Félix Macías, fueron ellos inculcaron en mi la pasión por estas dos disciplinas. También, tuve exelentes profesores a quienes quiero agradecer : Adriano, de matemáticas, Adonis, de física, Roberto, de química, Mercedes, de inglés, así como al exelente director del centro Elpidio Morales. Mientras cursaba estudios secundarios, también se destacaron Regla, de historia, Lucía, de español-literatura, Bararita, de educación laboral, Maira, de inglés, entre otros.

En La Habana, recuerdo con mucha admiración a mis profesores de física general y de matemáticas superiores Juan de Dios Garrido, Valentina Badía, Roberto Cruz y Mario Piris, quienes se inspiraron del exelente modelo soviético para impartir sus clases.

En París cuento con numerosos amigos cubanos como Lázaro e Ismel que siempre me apoyaron y quienes además asistieron a la lectura de la tesis el día 19 de septiembre del 2006. Fernando siempre me apoyó, además de haberme hecho sobrepasar los momentos más difíciles de esta etapa, mientras pasaba horas en su casa mirando los capítulos de la comedia española "Aquí no hay quien viva". Ese día tan especial conté con la presencia de mi amiga española Beatriz, a quien quiero agradecer por ello y por haberme dado su mano durante los preparativos del brindis. Me hicieron además el honor de estar presentes mis amigos Antony (le Petit) y John, a todos ellos expreso el sentimiento de mis más sinceros reconocimientos.

En el Laboratorio de Física Nuclear y Altas Energías (LPNHE según las siglas en francés) de París-Jussieu, quiero agradecer en especial a José Ocariz por su ayuda y apoyo mientras era estudiante en el Master de Física Teórica y por haberme lanzado hacia la física teórica de altas energías. También recuerdo ahí a Jacques Chauveau, Lidia Ross, a Julie y a Florent Fayette que estuvieron presentes en la lectura de esta tesis.

Siempre estuve sostenido por Jean Marie, su madre Henriette y su esposa Caruquita. Merece la pena mencionar el apoyo incondicional que recibí de mi amiga Thérèse Obrecht, gran periodista suiza, mientras cursaba el Master de Física Teórica en París. Jean Savinien estuvo dentro de mis mejores amigos durante esta etapa, y también Bruno Durin.

En La Habana, a pesar de la distancia, conté siempre con el apoyo de amigos como Alexander, Etian, Henry, Lidia, Luis y Normita ; siempre tuve, por otra parte, el de mi gran amiga Yadira de Trinidad.

En Madrid, quiero agradecer a las hermanas Sara e Inés Rodríguez-Arguelles, mis dos amigas europeas más cercanas, al igual que a mis amigos cubanos y compañeros de beca (12 y Malecón) Armando y el Chino.

3 Introduction

Dans le cadre de la Chromodynamique Quantique (CDQ, théorie de jauge de Yang-Mills) perturbative, nous menons à bien une étude de quelques aspects physiques, ainsi que des techniques mathématiques qui ont permis de simplifier et de décrire l'évolution de la matière hadronique dans les collisions leptoniques ou hadroniques ("Deep Inelastic Scattering" (DIS), annihilation e^+e^- , collisions $pp \dots$) à très haute énergie. D'après la CDQ, les hadrons (proton (p), neutron (n), mésons (π^\pm) \dots) sont des particules composées de quarks (q), anti-quarks (\bar{q}) et gluons (g) (partons); cette théorie permet, en particulier, d'étudier les interactions quark-gluon, anti-quark-gluon et gluon-gluon au sein de ces particules. Elle permet ainsi de quantifier le comportement des interactions partoniques à très "courtes distances" (par rapport à la taille caractéristique des hadrons $\sim 10^{-13}\text{cm}$), où, grâce à la liberté asymptotique, on peut appliquer la théorie des perturbations en série de puissances de la constante de couplage α_s . Autrement dit, la CDQ perturbative décrit avec succès les processus dans lesquelles les effets à "petite distance" sont essentiels et, où la valeur de la constante de couplage est faible ($\alpha_s \ll 1$).

Prenons comme exemple le cas de l'annihilation e^+e^- en une paire quark-anti-quark, c'est à dire la réaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. La production de cette paire de particules chargées est suivie par l'émission d'un ensemble de gluons ($q(\bar{q}) \rightarrow gq(\bar{q})$) qui, à leur tour, donnent naissance à d'autres gluons ($g \rightarrow gg$) et/ou à d'autres paires quark-anti-quark ($g \rightarrow q\bar{q}$); tous les partons sont soumis aux forces de confinement de couleur et, par conséquent, ne se détectent pas séparément comme les leptons et les photons en Electrodynamique Quantique (EDQ). On appelle "jet" l'ensemble du système partonique produit qui a été initié par le quark ou l'anti-quark.

Dans les théories de jauge comme l'EDQ, ou la CDQ, où le médiateur des interactions est de masse nulle, la probabilité de production d'un quantum (un photon mou dans le cas de l'EDQ ou d'un gluon mou en CDQ) de basse énergie (par rapport à l'énergie E de la charge initiant le jet, $E \gg \omega$) est très grande $\propto d\omega/\omega$ [1][2]. En effet, une particule chargée rayonne lorsque son champ coulombien stationnaire est brisé sous l'action d'une perturbation externe.

À ce sujet, nous avons consacré le premier chapitre de cette thèse; nous allons en particulier, démontrer le caractère classique du rayonnement mou en EDQ, il sera ainsi obtenu en Électrodynamique Classique (EDC) dans l'objectif de mieux comprendre la nature, origine et universalité physiques de ce phénomène. Le cas où l'impact subi par la charge est instantané (accélération infinie) sera distingué de celui où l'on considère un transfert d'impulsion sur un intervalle de temps fini (accélération finie) [3]. Ceci permet de régulariser la "catastroph ultra-violette" à l'aide d'un "cut-off" physique naturel dont on généralise l'universalité à une trajectoire arbitraire suivie par la charge. Nous allons de même décrire l'origine physique de la cohérence en EDQ en considérant le processus physique le plus simple ($e^- \rightarrow e^- \gamma$, émission d'un photon de bremsstrahlung); une contrainte ("Angular Ordering" en anglais) sur les angles d'émission des photons mous (de bremsstrahlung) et l'angle de diffusion découle du calcul de la section efficace de ce processus, lorsque l'on prend la moyenne azimutale sur l'angle d'ouverture du cône de rayonnement (cône de bremsstrahlung); ici, on rencontre pour la première fois le caractère doublement logarithmique de la distribution ($\propto \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\Theta}{\Theta}$) des photons émis, à savoir que le processus n'est pas dominé que par les émissions de photons mous, mais aussi colinéaires. Cette étude se généralise au cas de la CDQ, où l'on doit en outre tenir compte du nouveau degré de liberté de la particule chargée, la couleur [4].

Nous ne nous intéressons qu’aux gluons mous rayonnés qui n’emportent qu’une petite fraction de l’énergie totale du parton initial ($x = \omega/E \ll 1$) car ils sont à l’origine du plus grand nombre de particules produites (les mésons légers π^\pm , K^\pm , ...) dans les jets hadroniques.

Dans le deuxième chapitre, pour des raisons pédagogiques, nous donnons les étapes qui ont conduit au calcul des jets [5], depuis le choix de la jauge axiale dans les diagrammes de Feynman jusqu’à la construction de l’équation maîtresse satisfaite par la fonctionnelle génératrice des grandeurs inclusives dans les jets (voir [6][7] et références incluses). Dans la jauge axiale, on peut traiter les jets comme des objets distincts qui émettent des gluons ; on introduit ainsi le schéma de resommation “DLA” (“Double Logarithmic Approximation” en anglais) [8] qui utilise les contraintes énergétiques ($E \gg \omega_i \gg \omega_{i+1} \dots$) et angulaires ($\Theta_i \gg \Theta_{i+1}$) rigoureuses sur les émissions successives des gluons mous ; ceci constitue l’ingrédient principal (car $\alpha_s \log^2 \sim 1$) dans l’estimation d’observables inclusives dans les jets hadroniques, telles que les multiplicités, le spectre, les corrélations. Mais il néglige le principe de conservation de l’énergie (recul du parton émetteur) et l’évolution de la constante de couplage α_s , et il s’avère insuffisant pour faire des prédictions que l’on puisse comparer avec les données expérimentales. Par contre, l’approximation “DLA” constitue le point de départ dans la construction du schéma probabiliste (consulter [6]) du calcul des jets. Elle permet en plus de prédire la *forme* des distributions inclusives et, en particulier, de décrire les phénomènes de *cohérence* des gluons mous en CDQ perturbative (voir [6] et références incluses). Le cas où la constante de couplage est fixée à la dureté totale (α_s constant) du jet et celui où l’on considère son évolution dans le “temps” ($t = d\Theta/\Theta$) sont distingués dans l’évaluation du spectre inclusif des gluons mous ainsi que dans le calcul des corrélations entre deux particules. Nous donnons, en “DLA”, les techniques utilisées dans [9], pour l’évaluation du spectre par la méthode du col. Elles sont d’importante utilité pour la compréhension de l’article C.3. De même, dans le calcul des corrélations à deux particules, nous présentons les techniques employées dans C.2 ; ici, nous avons effectué une étude améliorée de cette observable en CDQ perturbative.

Pourquoi “améliorée” ? Vues les limitations du schéma “DLA”, un traitement des corrections en “Logarithmes Simples” (“Single Logs” en anglais) est nécessaire. Ceci est l’objectif du chapitre 3 où nous discutons les sources physiques qui sont à l’origine de ces corrections :

- la variation de la constante de couplage $\alpha_s(k_\perp^2)$ dans le “temps” d’évolution caractéristique ($t = d\Theta/\Theta$) du jet ;
- les désintégrations d’un parton en deux partons d’énergies comparables $z \sim 1$ (les corrections dites “hard” qui restaurent la conservation de l’énergie en utilisant l’expression exacte des fonctions de fragmentation partonique de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) [10]) ;
- les régions cinématiques où les angles successifs d’émission sont du même ordre de grandeur $\Theta_i \sim \Theta_{i+1}$. Dans la solution de ce problème, la contrainte angulaire “rigoureuse” sur les angles d’émission $\Theta_i \gg \Theta_{i+1}$ qui découle de la cohérence des gluons mous en DLA est remplacée par la contrainte angulaire “stricte” $\Theta_i \geq \Theta_{i+1}$ (voir [6] et références incluses).

L’approximation correspondante est connue comme “MLLA” (“Modified Leading Logarithmic Approximation” [11] en anglais). Elle tient compte des corrections sous-dominantes en “SL” (“Single Logs” en anglais) dans le “Hamiltonien” d’évolution partonique ; elles sont de l’ordre de γ_0^2 , où $\gamma_0 \propto \sqrt{\alpha_s}$ constitue la dimension anormale des multiplicités en “DLA” [9]. Nous donnons l’équation maîtresse que satisfait la fonctionnelle génératrice dans le cadre MLLA [6][7]. Elle permet d’obtenir les équations d’évolution des distributions partoniques inclusives dans le domaine des “petits x ”. Elles sont utilisées dans les articles C.1, C.2 et

C.3 qui sont l’objet principal de cette thèse. Nous faisons de même le lien avec les équations DGLAP [10] dont on utilise les solution dans l’espace de Mellin dans C.1.

Dans l’article C.1, nous effectuons le premier calcul MLLA analytique des distributions inclusives en fonction de l’impulsion transverse k_\perp dans le domaine des “petits x ”. Nous utilisons l’approximation du “limiting spectrum” [11] (le cut-off colinéaire Q_0 est alors égal à l’échelle de masse Λ_{QCD} , $Q_0 = \Lambda_{QCD}$), qui permet de bien décrire le spectre inclusif d’une particule en fonction de l’énergie. Nous faisons des prédictions aux énergies du LEP, du Tevatron et du future LHC. On démontre comment tenir compte de l’évolution du jet permet de restaurer la positivité des distributions, ce qui n’est pas le cas en “DLA” [6], où elle est négligée. L’intervalle de validité de notre calcul en MLLA est donné. Nous démontrons qu’il est d’autant plus grand que l’énergie du jet est importante. Les interférences des gluons mous, (phénomènes de cohérence en CDQ) étant écrantées par la divergence de la constante de couplage dans le domaine des petits k_\perp , nous les rendons visibles en prenant une valeur non-réaliste de l’énergie totale du jet qui diminue la valeur de α_s et qui permet de comparer la forme de cette distribution avec celle qui a été prédite par “DLA”. Dans le paragraphe 8.1.4 nous comparons nos prédictions pour la section efficace différentielle inclusive en fonction de k_\perp avec les données expérimentales préliminaires de CDF. L’accord entre théorie et expérience, via le paramètre phénoménologique \mathcal{K}^{ch} (qui normalise le nombre de partons au nombre de hadrons chargés), est excellent dans l’intervalle de validité “MLLA”; ceci permet une fois de plus, de confirmer l’hypothèse “LPHD” (“Local Hadron Parton Duality” en anglais) dans le cas des grandeurs inclusives. Nous rappelons que l’hypothèse “LPHD” suppose que les hadrons se comportent “comme des partons” et que l’on peut donc leur attribuer les mêmes propriétés [11][11].

Dans l’article C.2 étudions les corrélations entre deux particules dans un jet en fonction de leur énergie, dans le cadre “MLLA”. Le premier calcul des corrélations a été effectué par Fong et Webber en 1991 [12]. Ils ont obtenu une expression analytique simple seulement dans le cas où l’énergie des particules est proche du maximum de leur distribution inclusive (“distorted Gaussian” [13] en anglais). Elle croît linéairement en fonction de la somme $[\ln(1/x_1) + \ln(1/x_2)]$ et est quadratique en fonction de la différence $[\ln(1/x_1) - \ln(1/x_2)]$. Elle a de plus seulement été évaluée dans la limite $Q_0 = \Lambda_{QCD}$. Dans cette thèse, nous résolvons au contraire de façon exacte les équations d’évolution, en utilisant la logique qui a bien réussi dans la description du spectre inclusif ; à savoir, nous calculons la solution exacte d’une équation “MLLA” (donc approchée) dans le domaine des “petits x ”. Cette expression est écrite dans C.2 pour les jets de quarks et de gluons, en termes des dérivées logarithmiques du spectre, puis nous la calculons numériquement dans l’approximation du “limiting spectrum”. Il est ainsi démontré que les corrélations, au lieu de croître indéfiniment en fonction de cette somme, comme dans [12], s’aplatissent, puis décroissent jusqu’à leur valeur minimale 1 (particules décorréliées) ; ceci est lié à la cohérence des gluons mous lorsque leurs impulsions deviennent négligeables. Nous prédisons aussi des corrélations plus faibles par rapport à l’analyse de Fong et Webber ; les explications sont présentées. Contrairement au cas du spectre, on s’attend à ce que les corrélations fournissent un test plus réaliste de la dynamique hadronique par rapport à la dynamique partonique. Le paramètre \mathcal{K}^{ch} se simplifie, en effet, dans la définition de cette observable et l’hypothèse “LPHD” peut être sujette à caution. Nous comparons nos prédictions avec celles de Fong-Webber, ainsi qu’avec les données expérimentales du LEP-I [14]. Dans le paragraphe complément 8.2, nous donnons des explications supplémentaires.

Dans l’article C.3, nous nous intéressons à l’évaluation du spectre par la méthode du col, dans le cas général $Q_0 \neq \Lambda_{QCD}$. Bien que s’agissant d’une approximation, elle se révèle extrêmement performante tout en étant beaucoup plus simple et économique à mettre en

œuvre. Elle permet de faire de très bonnes prédictions sur la forme, la position du pic de la distribution et sur les effets de cohérence en CDQ. Lorsque l'on prend les limites $Q_0 \rightarrow \Lambda_{QCD}$ et $Y + \lambda \rightarrow \infty$, on obtient un très bon accord entre cette méthode et la méthode exacte du travail précédent. Puisque les corrélations à 2 particules y ont été exprimées en fonction des dérivées logarithmiques du spectre, ce sont elles que nous attachons ensuite à évaluer, afin d'obtenir, ce qui n'avait pas été possible auparavant, des expressions à λ quelconque pour ces corrélations. Nous pouvons ainsi étudier leur dépendance en λ . Le "limiting spectrum" $\lambda = 0$ semble être le plus susceptible d'un accord avec l'expérience. L'analyse de Fong et Webber a donc pu être généralisée, et on la retrouve bien dans les limites appropriées.

3.1 Comparaison avec les travaux précédents

Les premiers calculs effectués dans l'approximation MLLA ont concerné les multiplicités hadroniques des jets en CDQ et le spectre inclusif d'une particule, évalués en fonction de l'énergie ($\ell = \ln(1/x)$) ("hump-backed plateau"). On citera ainsi [6], [13] qui traite "l'approximation gaussienne", [11], [11] et [7]. En ce qui concerne le spectre, l'accord entre prédictions théoriques et les données expérimentales (LEP par exemple [26][27]) est remarquable. L'hypothèse de dualité locale parton hadron ("LPHD" en anglais) [11] se trouve parfaitement confortée par les données.

Par contre, le seul calcul concernant les distributions inclusives en fonction de l'impulsion transverse n'a été effectué qu'en DLA. Il est expliqué en détails dans le paragraphe 5.8. C'est dans l'article C.1 que ce calcul a été pour la première fois généralisé au cadre MLLA.

Pour les corrélations à deux particules dans un jet, des prédictions ont été obtenues en DLA [9], et en MLLA par Fong & Webber [12]. Le cas DLA sera discuté dans le paragraphe 6, qui ne décrit que certains traits de cette observable. Les calculs MLLA de Fong & Webber [12] [13] ont été obtenus dans le cadre restreint où l'énergie des deux particules se trouve au voisinage du maximum de leur distribution inclusive, en conséquence de quoi ni l'aplatissement attendu ni la décroissance en fonction de la somme $[\ln(1/x_1) + \ln(1/x_2)]$. Cela sera discuté dans le paragraphe 6.2. Dans l'article C.2, par la résolution exacte des équations d'évolution MLLA, via le formalisme de la fonctionnelle génératrice, nous avons pu nous affranchir de cette restriction et donner une solution valable pour tout x . Le calcul a pu être mené à bien analytiquement jusqu'au bout pour les petits x et dans le cas (limiting spectrum $\lambda = 0$) où le cut-off colinéaire est égal à Λ_{QCD} . Nous avons également généralisé au cadre MLLA la représentation intégrale (5.94) à $\lambda \neq 0$.

L'utilisation de la méthode du col a permis, dans l'article C.3, des progrès supplémentaires. En effet, si cette méthode constitue une approximation, elle s'est révélée redoutablement efficace et précise pour le calcul des corrélations. Ainsi, on a pu s'affranchir du "limiting spectrum" et donner des formules analytiques pour $\lambda \neq 0$, toujours dans le cadre MLLA, ce qui n'avait jamais été possible auparavant. col du paragraphe 5.11 à $\lambda \neq 0$. Les résultats de Fong & Webber sont reproduits dans les limites appropriées.

Si les résultats obtenus pour les corrélations sont en bien meilleur accord avec les résultats expérimentaux existants de LEP [26][27] que ceux de Fong & Webber ou ceux obtenus aussi par la méthode du col mais en DLA (5.108), il n'en subsiste pas moins un désaccord avec les données.

Les résultats à venir (Tevatron, LHC) sur les corrélations constitueront donc un test important des prédictions de la CDQ perturbative, et de l'hypothèse de dualité locale parton hadron ; cette dernière peut en effet être plus sujette à caution en ce qui concerne cette observable moins inclusive que les distributions étudiées dans le premier travail de cette thèse.

L'éventualité d'un rôle non négligeable des corrections next-to-MLLA n'est pas non plus à écarter arbitrairement.

Nous avons également discuté en détail, pour toutes les observables étudiées, les phénomènes de cohérence des gluons mous à petit k_\perp .

4 Rayonnement mou en électrodynamique quantique (classique). Extension à la chromodynamique quantique

Ce chapitre a pour but de rappeler les aspects essentiels du rayonnement mou en Electrodynamique Quantique (EDQ) ainsi qu'en Chromodynamique Quantique (CDQ). Nous allons obtenir le courant d'accompagnement mou (bremsstrahlung) d'une particule chargée (souvent appelé "rayonnement de freinage" dans la littérature) dans le cadre quantique à partir des diagrammes de Feynman à l'ordre des arbres. Après avoir démontré son universalité et sa nature classique, nous l'obtiendrons en utilisant la théorie classique du rayonnement où une nouvelle méthode sera exposée. Son interprétation physique permettra de comprendre la forme de la distribution trouvée pour les photons émis à l'intérieur d'un certain créneau de rapidité. La généralisation au rayonnement des gluons mous en CDQ sera automatique en ajoutant le nouvel ingrédient de la théorie, la couleur. Nous comparerons les phénomènes de cohérence dans les deux théories. Le chapitre sera conclu par une application des résultats obtenus aux deux canaux de production possible du boson de Higgs dans les futurs collisionneurs.

4.1 Courant d'accompagnement mou d'une particule chargée ; méthode quantique

Nous considérons un photon de bremsstrahlung (photon mou) émis par une particule chargée (électron) sous l'action d'un champ externe (exemple : un champ électrostatique).

Les diagrammes de Feynman à l'ordre des arbres sont données dans la Fig.1 [4]. $p_1 = (p_1^0, \vec{p}_1)$, $p_2 = (p_2^0, \vec{p}_2)$ représentent les quadri-impulsions de l'électron entrant et sortant respectivement, et $k = (k^0, \vec{k})$ celle du photon réel¹ émis lors du processus. En appliquant les règles de Feynman, les amplitudes correspondantes s'écrivent sous la forme [1] [2] :

$$M_i^\mu = e \bar{u}(p_2, s_2) V(p_2 + k - p_1) \frac{m + \not{p}_1 - \not{k}}{m^2 - (p_1 - k)^2} \gamma^\mu u(p_1, s_1) \quad (4.1)$$

lorsque l'électron est émis avant la diffusion (diagramme à gauche), et

$$M_f^\mu = e \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\mu \frac{m + \not{p}_2 + \not{k}}{m^2 - (p_2 + k)^2} V(p_2 + k - p_1) u(p_1, s_1) \quad (4.2)$$

lorsqu'il est émis après (diagramme à droite). $s_{1,2}$ étiquètent l'état de spin de l'électron, V l'amplitude d'interaction qui, en général, dépend de l'impulsion transférée (dans le cas de la diffusion sur un champ e.m. $V = \gamma_0$). L'amplitude totale est donnée par la somme des amplitudes

$$M^\mu = M_i^\mu + M_f^\mu.$$

¹Il s'agit d'un photon qui aurait dû être réabsorbé par l'électron (photon virtuel) si celui-ci n'avait pas été dévié de sa trajectoire initiale.

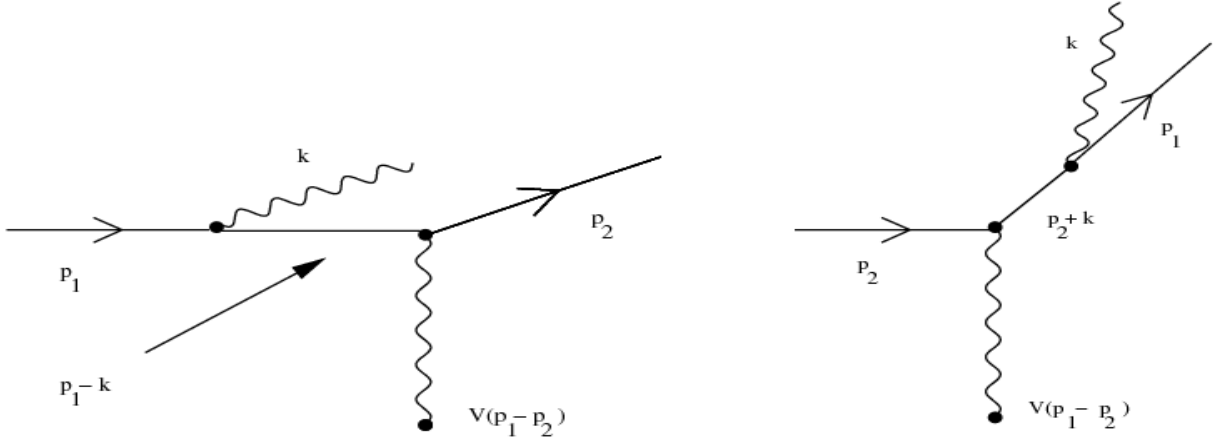


FIG. 1 – Diagrammes de Feynman d'un photon de bremsstrahlung émis sous l'action d'un champ externe.

Nous utilisons l'approximation du photon mou [1][2] (on prend son énergie très inférieure à celle de l'électron qui l'a émis et on néglige le recul de celui-ci), $\omega \ll p_1^0, p_2^0$, on néglige les termes en \not{k} au numérateur, on utilise l'astuce de Dirac $\not{p}\gamma^\mu = -\gamma^\mu\not{p} + 2p^\mu$, ainsi que les équations suivantes pour des fermions (électrons) sur couche de masse :

$$(m + \not{p}_1)\gamma^\mu u(p_1) = (2p_1^\mu + \gamma^\mu[m - \not{p}_1])u(p_1) = 2p_1^\mu u(p_1), \quad (4.3)$$

$$\bar{u}(p_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_2) = \bar{u}(p_2)([m - \not{p}_2]\gamma^\nu + 2p_2^\nu) = \bar{u}(p_2)2p_2^\nu. \quad (4.4)$$

(4.3) (4.4) seront utilisées pour simplifier M_i^μ et M_f^μ respectivement. Nous simplifions les dénominateurs en utilisant l'approximation ($p_i^2 \approx m^2$) pour des électrons de très faible virtualité et $k^2 = 0$ pour des photons réels. Nous avons

$$\begin{aligned} m^2 - (p_1 - k)^2 &\approx 2(p_1 \cdot k), \\ m^2 - (p_2 + k)^2 &\approx -2(p_2 \cdot k). \end{aligned}$$

L'amplitude totale M^μ est donc donnée par l'expression suivante [4]

$$M^\mu = e j^\mu \times M_{el}. \quad (4.5)$$

Ici M_{el} représente l'élément de matrice de Born de la partie non-radiative (élastique) de la diffusion,

$$M_{el} = \bar{u}(p_2, s_2)V(p_2 - p_1)u(p_1, s_1)$$

dans lequel le recul de l'électron a été négligé ², $q = p_2 + k - p_1 \simeq p_2 - p_1$, donc le principe de conservation de l'énergie violé. Le courant de rayonnement mou associé à une particule chargée j^μ est donc donné par l'expression

$$j^\mu = \frac{p_1^\mu}{(p_1 \cdot k)} - \frac{p_2^\mu}{(p_2 \cdot k)}. \quad (4.6)$$

²Ceci entraîne une mauvaise estimation des observables que l'on peut mesurer dans certains processus (voir chapitre 5).

La factorisation de l'amplitude de diffusion (4.5) est tout à fait naturelle. Le quadri-courant j^μ ne dépend pas de la nature des particules chargées, en particulier, du spin. Elle dépend des impulsions (p_1, p_2, k) et de la charge (e) des particules entrante et sortante. Ceci a été démontré dans les travaux de Low [15] pour des bosons chargés, et généralisée par Burnett et Kroll [16] pour le cas des fermions.

Le courant (4.6) est essentiellement classique. Il peut d'ailleurs être obtenu dans le cadre de la théorie classique du rayonnement [17][18] en considérant le potentiel induit par une particule chargée lorsqu'elle est soudainement déviée de sa trajectoire (accélérée) sous l'action d'un champ externe, comme je le montre maintenant.

4.2 Considérations classiques sur le rayonnement ; accélération instantanée infinie

Dans la théorie classique du rayonnement il est connu qu'une charge accélérée crée un champ comportant, outre une contribution de type coulombien ($\propto 1/R^2$), une contribution de type rayonnement ($\propto 1/R$) [17][18]. Nous allons estimer le champ induit par une particule chargée lorsqu'elle subit une déviation instantanée (choc) à un instant t_0 . On prend $e = 1$ pour simplifier. Le courant électromagnétique dans ce cas est donné par les deux termes suivants

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_1 = \vec{v}_1 \delta^3(\vec{r} - \vec{v}_1 t) \vartheta(t_0 - t), \\ \vec{j}_2 = \vec{v}_2 \delta^3(\vec{r} - \vec{v}_2 t) \vartheta(t - t_0), \end{array} \right. \quad (4.7)$$

où $\vec{v}_{1,(2)}$ est la vitesse initiale (finale) de la particule lorsqu'elle se déplace le long de sa trajectoire classique $\vec{r} = \vec{v}_i t$ (en mécanique classique nous pouvons parler de trajectoire, voir Fig. 2). ϑ représente ici la fonction de Heaviside. Nous restaurons la covariance de Lorentz en ajoutant à (4.7) la composante j^0 qui correspond à la densité de charge du quadri-vecteur, puis on définit j^μ d'après

$$j_i^\mu(t, \vec{r}) = \left(j_i^0(t, \vec{r}), \vec{j}_i(t, \vec{r}) \right) \equiv v_i^\mu j_i^0, \quad (4.8)$$

où la quadri-vitesse s'exprime $v_i^\mu = (1, \vec{v}_i)$.

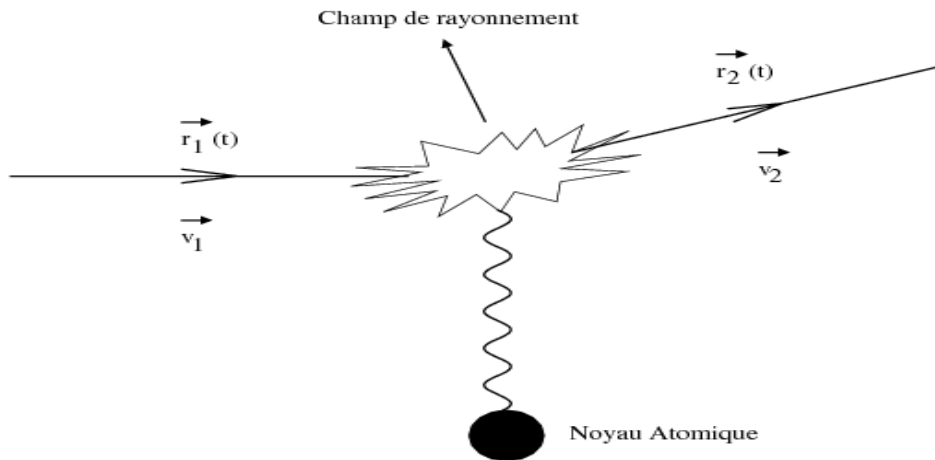


FIG. 2 – Champ de rayonnement induit par une charge soudainement accélérée.

L'amplitude d'émission du champ de quadri-impulsion ($k_0 = \omega, \vec{k}$) est proportionnelle à la transformée de Fourier du courant électrique total :

$$j_i^\mu(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3\vec{r} e^{ix^\nu k_\nu} j_i^\mu(t, \vec{r}),$$

dont on déterminera les deux termes correspondants à la trajectoire de la Fig. 2 :

$$j_1^\mu(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3\vec{r} e^{ix^\nu k_\nu} j_1^\mu(t, \vec{r}) = v_1^\mu \int_{-\infty}^0 d\tau e^{ik_0(t_0+\tau)-i(\vec{k}\cdot\vec{v}_1)\tau} \quad (4.9)$$

$$= \frac{-iv_1^\mu e^{ik_0 t_0}}{k^0 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1)}, \quad (4.10)$$

$$j_2^\mu(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3\vec{r} e^{ix^\nu k_\nu} j_2^\mu(t, \vec{r}) = v_2^\mu \int_0^{+\infty} d\tau e^{ik_0(t_0+\tau)-i(\vec{k}\cdot\vec{v}_2)\tau} \quad (4.11)$$

$$= \frac{iv_2^\mu e^{ik_0 t_0}}{k^0 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_2)}. \quad (4.12)$$

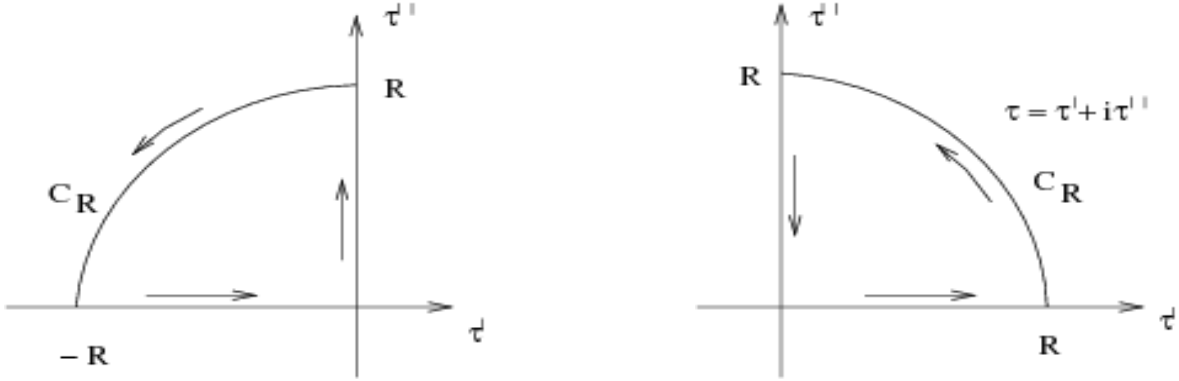


FIG. 3 – Contour d'intégration choisi pour évaluer (4.9) (figure gauche) et (4.11) (figure droite).

Exemple : calcul de (4.9)

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i[k^0 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)]\tau}. \quad (4.13)$$

On choisit le contour de la Fig. 3 à gauche, on effectue le prolongement analytique $\tau = \tau' + i\tau''$ et on applique le théorème de Cauchy [19]

$$\int_C d\tau e^{i[k^0 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)]\tau} = \int_{-R}^0 d\tau' e^{i[k^0 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)]\tau'} + i \int_0^R d\tau'' e^{-[k^0 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)]\tau''} + \int_{C_R} d\tau e^{i[k^0 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)]\tau} = 0.$$

On passe maintenant à la limite $R \rightarrow \infty$. En vertu du lemme de Jordan [19] l'intégrale sur le contour du cercle s'annule et on obtient :

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 d\tau' e^{i[k^0 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)]\tau'} = \lim_{R \rightarrow \infty} -i \int_0^R d\tau'' e^{-[k^0 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)]\tau''} = -\frac{i}{k^0 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1)}, \quad (4.14)$$

puis $j_1^\mu(k) = v_1^\mu e^{i\omega t_0} I_1(k)$, d'où on déduit le résultat (4.10). Le calcul pour (4.11) se fait de façon analogue en choisissant le contour à droite de la Fig. 3 pour obtenir (4.12).

La solution de l'équation de Maxwell [17] pour le quadri-potentiel induit par le quadri-courant (4.8) s'écrit sous la forme [17] :

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ix^\mu k_\mu} [-2\pi i \delta(k^2)] j^\mu(k) \\ &= \int \frac{d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} e^{-i\omega x^0 + i(\vec{k} \cdot \vec{x})} A^\mu(k), \end{aligned} \quad (4.15)$$

où

$$\begin{aligned} A^\mu(k) &= A_2^\mu(k) - A_1^\mu(k); \\ A_i^\mu(k) &= \frac{v_i^\mu e^{i\omega t_0}}{\omega(1 - v_i \cos \Theta_i)}; \quad \omega = |\vec{k}|, \quad (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) \equiv \omega v_i \cos \Theta_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ici Θ_i représente l'angle d'émission entre l'impulsion du photon \vec{k} et la direction du mouvement de la charge. Si l'on récrit (4.16) sous la forme covariante [4]

$$\begin{aligned} \frac{v_i^\mu}{\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v}_i)} &= \frac{E_i v_i^\mu}{E_i(\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v}_i))} = \frac{p_i^\mu}{(p_i \cdot k)}, \\ A_i^\mu(k) &= \exp(i\omega t_0) \left(\frac{p_2^\mu}{(p_2 \cdot k)} - \frac{p_1^\mu}{(p_1 \cdot k)} \right), \end{aligned}$$

on remarque que le quadri-potentiel classique est identique à celui qui a été obtenu de façon quantique (4.6) à une phase près $\exp(i\omega t_0)$. Cette dernière n'intervient pas dans le calcul des sections efficaces lorsque l'on prend le module de l'amplitude au carré.

L'analyse classique conduit au résultat (4.6) qui a été obtenu au paragraphe précédent 4.1 dans la limite du photon mou. Ce résultat est naturel car, dans cette approximation (recul de l'électron négligeable), il est légitime de considérer que les charges se déplacent sur des trajectoires classiques.

L'origine physique du courant (4.6) peut être interprétée autrement. Le champ d'une charge ponctuelle qui se déplace, par exemple, à vitesse constante, est de nature convective (il accompagne la particule). Lorsque la charge est soudainement accélérée, le nouveau champ ne peut pas la suivre instantanément. La nouvelle configuration non-stationnaire rayonne cet excès d'énergie ($\propto j^\mu j_\mu$) jusqu'à ce que la nouvelle configuration stationnaire du champ soit atteinte.

4.2.1 Densité \mathcal{N} du nombre de photons rayonnés

On s'intéresse maintenant à l'évaluation de la densité du nombre de photons rayonnés dans le cas d'une l'accélération instantanée choisie le long de l'axe $x \equiv x_1$. L'énergie totale rayonnée dans le volume différentiel de l'espace de phase $d^3 k$ est donnée par l'expression[2]

$$dE = \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3} [-j^\mu(k) j_\mu^*(k)], \quad \omega = |\vec{k}|, \quad d^3 k = k_\perp \cosh y \, dy \, d^2 k_\perp = k_\perp^2 \cosh y \, dy \, dk_\perp \, d\phi, \quad (4.17)$$

où l'angle azimutal $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Nous avons introduit l'impulsion transverse k_\perp du photon ainsi que sa rapidité y

$$k^\mu = (\omega = k_\perp \cosh y, k_\perp \sinh y, \vec{k}_\perp).$$

y est liée à l'angle zénithal Θ par l'expression suivante (voir Fig. 4) :

$$\tan \Theta = \frac{1}{\sinh y} \Leftrightarrow y = \ln \frac{1}{\tan \Theta/2}.$$

Elle montre qu'aux grands angles d'émission des photons correspondent des petites rapidités

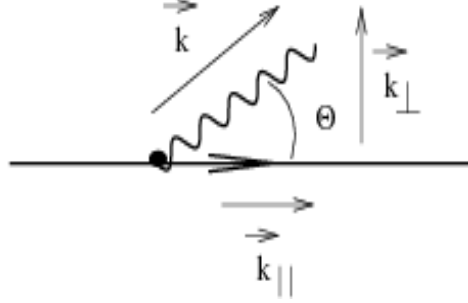


FIG. 4 – Émission d'un photon de quadri-impulsion $k = (\omega, \vec{k})$ par une particule chargée, $\vec{k}_{||}$ est l'impulsion longitudinale du photon et \vec{k}_{\perp} son impulsion transverse .

et *vice versa*. En introduisant la variable de rapidité de la charge (η) selon

$$v^{\mu} = (\cosh \eta, \sinh \eta, \vec{0}),$$

on a

$$v_i \cdot k = k_{\perp} \cosh(\eta_i - y), \quad j^{\mu} j_{\mu}^{*} = -\frac{1}{k_{\perp}^2} [\tanh(\eta_2 - y) - \tanh(\eta_1 - y)]^2.$$

On définit la densité (\mathcal{N}) du nombre de photons rayonnés (dE/ω) par unité de volume (d^3k/ω) en fonction de k_{\perp} et y [3] :

$$\mathcal{N}(y, k_{\perp}) \equiv \frac{\frac{dE}{\omega}}{\frac{d^3k}{\omega}} = \frac{dE}{k_{\perp} d^2k_{\perp} dy \cosh y} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{k_{\perp}^2} [\tanh(\eta_2 - y) - \tanh(\eta_1 - y)]^2 \right\}. \quad (4.18)$$

A k_{\perp} fixé l'allure de (4.18) est donnée par un plateau qui s'étend entre la rapidité initiale (η_1) et finale (η_2) de la charge accélérée, puis s'annule exponentiellement au-delà (voir Fig.5). Ce plateau est bien connu en électrodynamique classique sous le nom de cône de rayonnement en Θ [17]. La dépendance de \mathcal{N} en $1/k_{\perp}^2$ est remarquable (voir chapîtres 5, 7, les articles C.1, C.2 et C.3 qui font l'objet de cette thèse). La densité du nombre total de photons rayonnés à rapidité y fixée

$$\tilde{\mathcal{N}}(y) \equiv \int \frac{dE}{k_{\perp} d^2k_{\perp} dy \cosh y} d^2k_{\perp} = \int \mathcal{N}(y, k_{\perp}) d^2k_{\perp} \propto \ln[k_{\perp}] \quad (4.19)$$

s'avère logarithmiquement divergente en 0 (catastrophe infrarouge) et à l'infini (catastrophe ultraviolette) pour le cas de l'accélération instantanée. Cette dernière se justifie puisque l'accélération est infinie à $t = t_0$. Nous allons donc régulariser cette divergence ultraviolette en considérant le cas d'une accélération finie sur un intervalle de temps fini.

Remarque : $\tilde{\mathcal{N}}$ est bien logarithmiquement divergente car on intègre sur $\frac{dk_{\perp}}{k_{\perp}}$. On trouve cette divergence logarithmique dans les théories de jauge où le médiateur des interactions (photons en EDQ, gluons en CDQ) est de masse nulle [1][2].

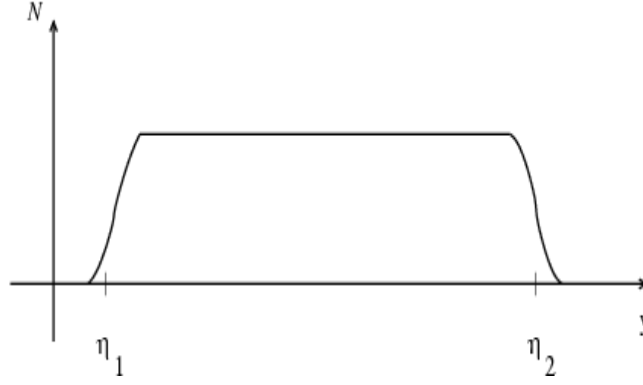


FIG. 5 – Densité du nombre de photons rayonnés à k_{\perp} fixé en fonction de la rapidité y du photon.

4.3 Accélération finie : deux cas simples

Dans ce paragraphe nous poursuivons les raisonnements précédents dans les cas les plus simples d'une accélération finie [3]. En particulier, nous considérons le mouvement rectiligne à accélération propre constante de la charge.

4.3.1 Un premier cas de trajectoire rectiligne : plateau de largeur infinie

Soit la ligne d'univers donnée par [3]

$$x^{\mu}(\tau) = \frac{1}{a_0}(\sinh a_0\tau, \cosh a_0\tau, \vec{0}), \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (4.20)$$

où τ est le temps propre, a_0 l'accélération propre, définis dans le référentiel de la charge. (4.20) satisfait

$$t^2 - x^2 = -\frac{1}{a_0^2}, \quad d\tau^2 = dx_0^2 - d\vec{x}^2$$

(4.20) correspond au cas d'une accélération finie transmise à une charge ultra-relativiste ($v = c = 1$) dans un intervalle infini de rapidité, $\eta_1 = -\infty$, $\eta_2 = +\infty$. La vitesse de la charge s'écrit sous la forme

$$v(\tau) = \frac{dx^1(\tau)}{dx^0(\tau)} = \tanh a_0\tau,$$

et son accélération

$$a(\tau) = \frac{dv(\tau)}{dx^0(\tau)} = \frac{a_0}{\cosh^3(a_0\tau)}$$

dont on trace l'allure dans la Fig.6. On en déduit que la charge subit, dans le référentiel du laboratoire, une accélération variable pendant l'intervalle de temps $\simeq 1/a_0$ dont la valeur maximale est donnée par son accélération propre a_0 (constante dans le référentiel de la charge) à $\tau = 0$. On s'intéresse à la transformée de Fourier du courant rayonné [17][3]

$$j^{\mu}(k) = \int d\tau \frac{dx^{\mu}}{d\tau} e^{ikx(\tau)}. \quad (4.21)$$

En effectuant le produit scalaire $k^{\mu}x_{\mu}$, l'exposant dans (4.21) prend la forme

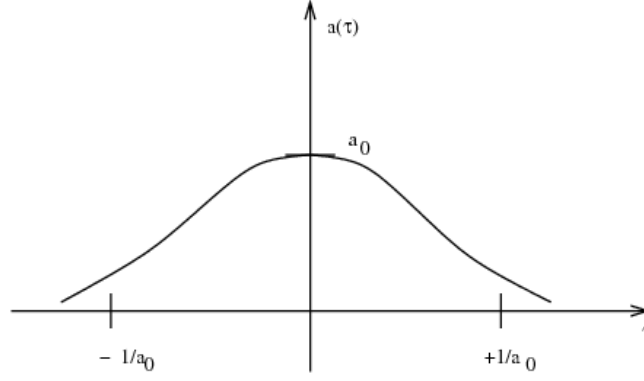


FIG. 6 – Accélération finie transmise dans un intervalle de temps fini.

$$kx(\tau) = \frac{k_{\perp}}{a_0} \sinh(a_0\tau - y).$$

Il s'avère intéressant d'effectuer un boost sur le référentiel du photon rayonné (K_y) qui se déplace avec la rapidité y . Dans K_y , le photon considéré ne possède pas d'impulsion longitudinale ($k_{\parallel} = 0$). Les nouvelles coordonnées s'écrivent en fonction des anciennes selon :

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0(\tau) &= [\cosh y x^0(\tau) - \sinh y x^1(\tau)] = \frac{1}{a_0} \sinh(a_0\tau - y), \\ \tilde{x}^1(\tau) &= [-\sinh y x^0(\tau) + \cosh y x^1(\tau)] = \frac{1}{a_0} \cosh(a_0\tau - y). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Le courant (4.21) prend donc la forme simple

$$\begin{aligned} \tilde{j}^0(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cosh(a_0\tau - y) \exp \left[i \frac{k_{\perp}}{a_0} \sinh(a_0\tau - y) \right] \\ &= \frac{1}{k_{\perp}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{d}{d\tau} \left\{ \exp \left[i \frac{k_{\perp}}{a_0} \sinh(a_0\tau - y) \right] \right\} = 0, \\ \tilde{j}^1(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \sinh(a_0\tau - y) \exp \left[i \frac{k_{\perp}}{a_0} \sinh(a_0\tau - y) \right] = i \frac{2}{k_{\perp}} [u K_1(u)], \end{aligned} \quad (4.23)$$

où $u = \frac{k_{\perp}}{a_0}$ et $K_1(u)$ est ici la fonction de Macdonald (Bessel modifiée) d'ordre 1. Son comportement asymptotique est donné par

$$[u K_1(u)]^2 = \begin{cases} 1 & \text{pour } u \ll 1; \\ u\pi \frac{e^{-2u}}{2} & \text{pour } u \gg 1. \end{cases}$$

Nous rappelons la représentation intégrale de la fonction de Macdonald sachant que

$$\cosh \xi = -i \sinh(\xi + i\frac{\pi}{2}),$$

$$K_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \cosh \xi - \nu \xi} d\xi, \quad K_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \cosh \xi} d\xi,$$

puis on prend la dérivé de K_0 par rapport à x

$$K_1(x) = -\frac{d}{dx} K_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \xi e^{-x \cosh \xi} d\xi.$$

Pour $u \ll 1$; $k_{\perp} \ll a_0$, la divergence que l'on trouvait dans le cas d'une l'accélération infinie au paragraphe précédent 4.3.1 est remplacée par un "cut-off" supérieur sur les fréquences, $k_{\perp} \approx a_0$. A y et k_{\perp} fixés on obtient un plateau de hauteur $\ln[a_0]$ sur un intervalle infini de rapidité. Dans ce cas, la densité du nombre total de photons rayonnés à rapidité y fixée se calcule sans difficulté (voir cas du mouvement rectiligne pour une équation horaire quelconque en [3])

$$\tilde{\mathcal{N}}(y) = \int^{a_0} \mathcal{N}(y, k_{\perp}) d^2 k_{\perp} \propto \ln[a_0].$$

Le spectre est ainsi dominé par la contribution logarithmique $\ln[a_0]$. La nature de ce "cut-off" peut être élucidée à partir des champs intervenant dans le problème. Le champ total est donné par la superposition du champ coulombien entraîné et du champ de rayonnement créé par l'accélération de la charge. Son expression exacte, n'étant pas importante dans ce problème, nous nous contentons d'en donner le comportement en fonction de la distance à laquelle on observe le processus

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{coul}} \left(\propto \frac{1}{R^2} \right) + \vec{E}_{\text{ray}} \left(\propto \frac{1}{R} \right).$$

Le champ coulombien domine à petites distances (petit R), tandis que le champ de rayonnement l'emporte à grandes distances (grand R). Or, la seule distance qui intervient dans le problème est donnée par la quantité " a_0^{-1} ". Ainsi, pour $R > a_0^{-1}$, le champ de rayonnement l'emporte sur le champ coulombien. Ceci équivaut à supposer que, dans cette région, on trouve des photons dont la longueur d'onde transverse λ_{\perp} est supérieure à a_0^{-1} , $R \sim \lambda_{\perp} \sim 1/k_{\perp} > a_0^{-1} \Rightarrow k_{\perp} < a_0$.

On peut également induire que les composantes de Fourier de plus hautes fréquences ($k_{\perp} > a_0$) suivent le mouvement de la charge, tandis que celles de plus basses fréquences $k_{\perp} < a_0$ se sont écartées de celle-ci et continuent leur mouvement le long de sa trajectoire. Ceci entraîne l'apparition d'un cône de rayonnement (cône de bremsstrahlung) le long de la trajectoire rectiligne.

4.3.2 Un deuxième cas de trajectoire rectiligne : plateau de largeur finie

Nous remplaçons la ligne d'univers (4.20) par

$$x^{\mu}(\tau') = \frac{1}{a_0} \left[\sinh a_0 \tau', \frac{1}{2} \left(v_2 e^{a_0 \tau'} + v_1 e^{-a_0 \tau'} \right), \vec{0} \right], \quad -\infty < \tau' < +\infty, \quad (4.24)$$

où l'on a introduit les paramètres supplémentaires v_1 et v_2 qui la différencient de (4.20). On peut vérifier par analyse dimensionnelle que v_1 et v_2 ont la dimension d'une vitesse. Ici, τ' n'a plus le sens physique d'un temps propre car $dx_{\mu} dx^{\mu} \neq d\tau'^2$.

(4.24) permet de rétrécir le plateau de la densité spectrale des photons émis à un intervalle fini de rapidité, dont les bornes sont données par

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v_1}{1-v_1} \right), \quad \eta_2 = +\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v_2}{1-v_2} \right);$$

si l'on pose $v_1 = v_2 = 1$, on retrouve, comme pour (4.20), un intervalle infini de rapidité $\Rightarrow \eta_1 \rightarrow -\infty, \quad \eta_2 \rightarrow +\infty$.

On s'intéresse également au boost (4.22) sur le référentiel où la composante longitudinale de l'impulsion k de la particule est nulle ($k_{\parallel} = 0$); l'expression de la composante j^0 du courant

s'écrit alors, dans le référentiel K_y , sous la forme

$$\tilde{j}^0(k) = \int d\tau' \left[\cosh y \cosh a_0 \tau' - \frac{1}{2} \sinh y \left(v_2 e^{a_0 \tau'} - v_1 e^{-a_0 \tau'} \right) \right] \exp \left\{ i \frac{k_\perp}{a_0} \left[\cosh y \sinh a_0 \tau' - \frac{1}{2} \sinh y \left(v_2 e^{a_0 \tau'} + v_1 e^{-a_0 \tau'} \right) \right] \right\}$$

qui peut se récrire plus simplement comme

$$\tilde{j}^0(k) = \frac{1}{k_\perp} \int d\tau' \frac{d}{d\tau'} \exp \left\{ i \frac{k_\perp}{a_0} \left[\cosh y \sinh a_0 \tau' - \frac{1}{2} \sinh y \left(v_2 e^{a_0 \tau'} + v_1 e^{-a_0 \tau'} \right) \right] \right\} = 0;$$

nous donnons de même l'expression de sa composante spatiale

$$\tilde{j}^1(k) = \int d\tau' \left[\frac{1}{2} \cosh y \left(v_2 e^{a_0 \tau'} - v_1 e^{-a_0 \tau'} \right) - \sinh y \cosh a_0 \tau' \right] \exp \left\{ i \frac{k_\perp}{a_0} \left[\cosh y \sinh a_0 \tau' - \frac{1}{2} \sinh y \left(v_2 e^{a_0 \tau'} + v_1 e^{-a_0 \tau'} \right) \right] \right\}. \quad (4.25)$$

Le calcul de (4.25) est détaillé dans l'appendice A.1

$$\begin{aligned} \tilde{j}^1(k) &= \frac{v_1 + v_2}{D} \int d\tau' \sinh(a_0 \tau' + \chi) \exp \left[i \frac{k_\perp}{a_0} D \sinh(a_0 \tau' + \chi) \right] \\ &= i \frac{2}{k_\perp} \times \frac{v_1 + v_2}{D^2} [u_1 K_1(u_1)] \\ &= i \frac{2}{k_\perp} \times \frac{1}{2} [\tanh(\eta_2 - y) - \tanh(\eta_1 - y)] [u_1 K_1(u_1)], \end{aligned}$$

avec $u_1 = \frac{k_\perp}{a_0} D(y, \eta_1, \eta_2)$. χ est donné dans le même appendice et D a comme expression

$$D^2(y, \eta_1, \eta_2) = \frac{\tanh \eta_2 - \tanh \eta_1}{\tanh(\eta_2 - y) - \tanh(\eta_1 - y)}.$$

La densité du nombre de photons rayonnés en fonction de y et k_\perp s'estime par analogie avec (4.18)

$$\mathcal{N}(y, k_\perp) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \left\{ \frac{e^2}{k_\perp^2} [\tanh(\eta_2 - y) - \tanh(\eta_1 - y)]^2 \right\} \quad (4.26)$$

dans la limite asymptotique qui donne le "cut-off" $k_\perp \approx a_0 D(y, \eta_1, \eta_2)$. Le plateau pour la distribution de la densité du nombre de photons présente l'allure de la Fig.7 dont l'expression est écrite ci-dessous,

$$\mathcal{N}(y, k_\perp) \propto \begin{cases} 1 & \text{pour } \eta_1 < y < \eta_2; \\ \exp[4(|\eta_2| - |y|)] & \text{pour } |y| \gg |\eta_2|; \\ \exp[-4(|\eta_1| + |y|)] & \text{pour } |y| \gg |\eta_1|. \end{cases}$$

Le cas (4.24) généralise (4.20) et permet de retrouver, en particulier, la distribution de la densité spectrale des photons en fonction de y à k_\perp dans un intervalle $\eta_1 \leq y \leq \eta_2$ (plateau de la Fig.5). On retrouve également le "cut-off" du cas (4.20) au terme $D(y, \eta_1, \eta_2)$ près. Ce "cut-off" dépend, bien sûr, de la vitesse (ou de la rapidité) initiale et finale de la charge considérée. La densité du nombre de photons rayonnés en fonction de y est finie et sa valeur s'estime sans difficulté

$$\tilde{\mathcal{N}}(y, \eta_1, \eta_2) = \int^{a_0 D(y, \eta_1, \eta_2)} \mathcal{N}(y, k_\perp) d^2 k_\perp \propto \ln[a_0 D(y, \eta_1, \eta_2)].$$

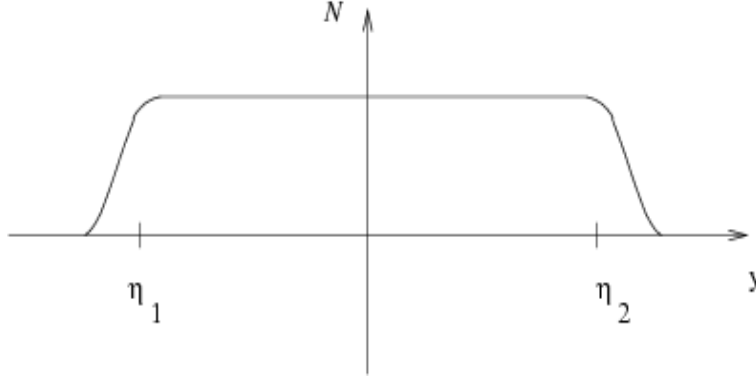


FIG. 7 – Densité du nombre de photons rayonnés à k_{\perp} fixé en fonction de la rapidité y

La hauteur du plateau est donc modifiée par le facteur $D(y, \eta_1, \eta_2)$.

Dans tous les cas discutés jusqu'à présent, nous avons rencontré la dépendance $\mathcal{N}(k_{\perp}^2) \propto 1/k_{\perp}^2$. Nous avons de même prédit la décroissance exponentielle du plateau au-delà d'une certaine limite en rapidité pour les photons émis à "haute fréquence" $k_{\perp} > a_0 D$ (photons virtuels ou réabsorbés par la particule).

* Soit le cas particulier où l'on prend $v_1 = v_2 = v$. Dans ce cas l'allure du plateau pour la densité des photon rayonnés est la même, par contre, il est symétrique par rapport à l'axe \mathcal{N} et s'étend dans l'intervalle de rapidité $-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) < y < +\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right)$. La valeur du "cut-off" est $k_{\perp} \approx a_0 D(y, \eta)$.

* Si l'on ne s'intéresse qu'aux rapidités positives, on peut poser $v_1 = 0$ et $v_2 = v$ dans (4.24). Dans ce cas-ci, le plateau pour la densité du nombre de photons rayonnés ne s'étend que dans l'intervalle des rapidités positives $0 < y < \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right)$. Son allure est représentée par le plateau de la Fig. 8

$$\mathcal{N}(y, k_{\perp}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \eta \gg y; \\ \exp\{4y\} & \text{pour } y < 0; \\ \exp\{4(\eta - y)\} & \text{pour } y \gg \eta. \end{cases}$$

La valeur du "cut-off" est ici $k_{\perp} \approx a_0 \Delta(y, \eta)$, où

$$\Delta^2(y, \eta) = \frac{\tanh \eta}{\tanh(\eta - y) + \tanh y}.$$

Remarque : Si l'on fait $y \approx \eta$ on obtient $\Delta(\bar{v}) \rightarrow 1$ et $k_{\perp} \approx a_0$. Les photons émis à $y \approx \eta$ (aux fréquences $k_{\perp} \gtrsim a_0$) ne sont jamais réabsorbés par la charge et sont émis sous forme de rayonnement le long de la direction choisie : le cône de bremsstrahlung apparaît.

4.4 Trajectoire arbitraire

Nous considérons enfin une trajectoire quelconque pour le mouvement de la charge. Nous rappelons l'expression du quadri-courant

$$\tilde{j}^{\mu}(k) = \int dt \frac{dx^{\mu}}{dt} e^{ikx(t)}. \quad (4.27)$$

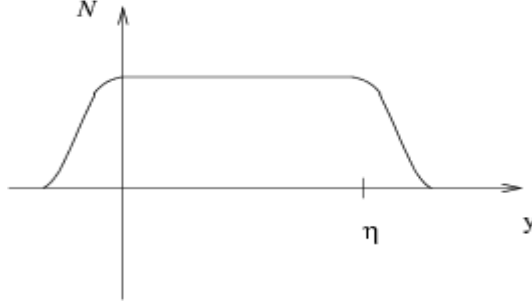


FIG. 8 – Densité du nombre de photons rayonnés à k_{\perp} fixé en fonction de la rapidité y

À ce propos, on écrit la quadri-impulsion du photon, pour un mouvement quelconque, comme

$$k^{\mu} = (k^0 = \omega, k^1, k^2, k^3).$$

Puisque $k^{\mu}k_{\mu} = 0$ (photon réel) on a $k_0 = |\vec{k}|$. Nous récrivons (4.27) sous la forme

$$\tilde{j}^{\mu}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, v^{\mu}(t) e^{ikx(t)}. \quad (4.28)$$

On sectionne la trajectoire de la particule chargée en trois parties. D'abord, nous considérons que sa vitesse initiale v_1 est constante pendant l'intervalle de temps $(-\infty, t_1)$, puis qu'elle subit l'action d'un champ externe pendant (t_1, t_2) , pour être enfin accélérée jusqu'à la vitesse finale v_2 . Pendant l'intervalle $(t_2, +\infty)$ elle continue son mouvement inertiel jusqu'à l'infini. Le courant rayonné prend la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{j}^{\mu}(k) &= \tilde{j}^{\mu}(k)_{-} + \tilde{j}^{\mu}(k)_c + \tilde{j}^{\mu}(k)_{+} = \int_{-\infty}^{t_1} dt \, v^{\mu}(t) e^{ikx(t)} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \, v^{\mu}(t) e^{ikx(t)} + \int_{t_2}^{+\infty} dt \, v^{\mu}(t) e^{ikx(t)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

Il est connu des calculs précédents sur le bremsstrahlung que :

$$\begin{aligned} \tilde{j}^{\mu}(k)_{-} &= -i \frac{v_1^{\mu}}{k \cdot v_1} e^{ikv_1 t_1}, \\ \tilde{j}^{\mu}(k)_{+} &= +i \frac{v_2^{\mu}}{k \cdot v_2} e^{ikv_2 t_2}, \end{aligned}$$

et que

$$\tilde{j}^{\mu}(k)_c = -i \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left\{ \frac{v^{\mu}(t)}{k \cdot v(t)} \right\} \frac{d}{dt} e^{ikx(t)}. \quad (4.30)$$

En intégrant (4.30) par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{j}^{\mu}(k)_c &= -i \left\{ e^{ikx(t)} \frac{v^{\mu}(t)}{k \cdot v(t)} \right\}_{t_1}^{t_2} + i \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} \left\{ \frac{v^{\mu}(t)}{k \cdot v(t)} \right\} e^{ikx(t)} \\ &= -i \frac{v_2^{\mu}}{k \cdot v_2} e^{ikv_2 t_2} + i \frac{v_1^{\mu}}{k \cdot v_1} e^{ikv_1 t_1} + i \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} \left\{ \frac{v^{\mu}(t)}{k \cdot v(t)} \right\} e^{ikx(t)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

et, finalement

$$\tilde{j}^\mu(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt v^\mu(t) e^{ikx(t)} = i \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{v^\mu(t)}{k \cdot v(t)} \right\} e^{ikx(t)}. \quad (4.32)$$

L'identité (4.32) sera utile pour la généralisation de notre analyse à une ligne d'univers arbitraire ; elle permet notamment de ne s'intéresser qu'à l'intervalle de temps pendant lequel la particule rayonne (temps de l'interaction avec un champ externe).

On démontre, en particulier, que l'existence d'un “cut-off” pour k_\perp , comme celui qui a été trouvé dans le cas d'une trajectoire rectiligne est universel. Il sera donc généralisé au cas d'une trajectoire quelconque. D'abord, on considère que la phase $\phi(t) = kx(t)$ varie peu dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) .

$$\phi(t_2) - \phi(t_1) \simeq \frac{d\phi}{dt} \Delta t = \left(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}(t) \right) \Delta t \ll 1 \quad (4.33)$$

Si \vec{k} est perpendiculaire à la vitesse \vec{v} , $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$, $\omega \Delta t \approx 0$, on est dans le cas considéré en 4.2.1 où l'accélération est infinie.

On pose $k = \left(\omega, k_\parallel, \vec{k}_\perp \right)^3$, $k^2 = 0 = \omega^2 - k_\parallel^2 - k_\perp^2$ (puisque les photons sont réels) $\Rightarrow k_\perp^2 = \omega^2 - k_\parallel^2$. Puisque $\vec{v} \perp \vec{k}_\perp$:

$$\left[\omega - k_\parallel (v + 1 - 1) \right] \Delta t = \left[\omega - k_\parallel + k_\parallel (1 - v) \right] \Delta t = \left(\frac{\omega^2 - k_\parallel^2}{\omega + k_\parallel} + k_\parallel \frac{1 - v^2}{1 + v} \right) \Delta t \ll 1,$$

que l'on peut récrire

$$\left(\frac{k_\perp^2}{\omega + k_\parallel} + \omega \frac{1 - v^2}{2} \right) \Delta t \ll 1. \quad (4.34)$$

Nous pouvons considérer que $\omega \approx k_\parallel \gg k_\perp$, ceci impose

1) si $1 - v = \mathcal{O}(1)$, le deuxième terme dans (4.34) est dominant $\Rightarrow \frac{1}{\lambda_\parallel} = \omega \ll \frac{1}{\Delta t}$ dans le cas relativiste ;

2) si $1 - v \ll 1$, le premier terme dans (4.34) est dominant $\Rightarrow \frac{1}{t_f} \simeq \frac{k_\perp^2}{2\omega} \ll \frac{1}{\Delta t}$ dans le cas ultra-relativiste qui nous intéresse. t_f est le temps de formation de l'état virtuel associé à cette émission.

2) $\Rightarrow k_\perp \ll \sqrt{\frac{\omega}{\Delta t}} \ll \frac{\gamma}{\Delta t}$. L'exponentielle dans l'expression du courant (4.32) peut être négligée et on l'estime selon

$$\tilde{j}^\mu(k) = i \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{v^\mu(t)}{k \cdot v(t)} \right\} e^{ikx(t)} \approx i \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{v^\mu(t)}{k \cdot v(t)} \right\} = i \left[\frac{v^\mu(t_2)}{k \cdot v(t_2)} - \frac{v^\mu(t_1)}{k \cdot v(t_1)} \right],$$

tandis que les hautes fréquences sont supprimées par le “cut-off” $k_\perp \approx \frac{\gamma}{\Delta t}$ dont le second membre a la dimension d'une accélération propre.

³l'impulsion longitudinale k_\parallel et l'impulsion transverse k_\perp sont définies par rapport à la direction du mouvement de l'électron sortant

4.4.1 Courant dans le référentiel où $k'_{\parallel} = 0$, direction arbitraire

Nous nous intéressons, comme dans les cas précédents 4.3.1 4.3.2, à l'expression du courant dans le référentiel où l'impulsion longitudinale du photon est nulle $k'_{\parallel} = 0$, pour une direction maintenant arbitraire du mouvement. Nous effectuons un boost sur le référentiel K_y où la rapidité du photon est égale à y . On définit la vitesse du boost selon $\vec{\beta} = \tanh y \vec{n}_{\vec{\beta}}$. Les transformations de Lorentz de l'espace-temps (x^μ) et de la quadri-impulsion (k^μ) le long d'une direction arbitraire $\vec{n}_{\vec{\beta}}$ sont données respectivement par [18]

$$t' = \gamma(\beta) (t - \vec{\beta} \cdot \vec{r}), \quad \omega' = \gamma(\beta) (\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{k}),$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \frac{\gamma(\beta) - 1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \vec{\beta} - \gamma(\beta) \vec{\beta} t, \quad \vec{k}' = \vec{k} \frac{\gamma(\beta) - 1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{k}) \vec{\beta} - \gamma(\beta) \vec{\beta} \omega,$$

où $\gamma(\beta) = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = \cosh y$ est le facteur de Lorentz. Le quadri-vecteur $k^\mu = (\omega = k^0, k_{\parallel}, \vec{k}_{\perp})$ obéit à la même loi de transformation que $x^\mu = (t, \vec{r})$. Il est de même utile d'obtenir le courant dans le référentiel où la composante longitudinale de sa quadri-impulsion est nulle $k'^\mu = (\omega', 0, \vec{k}'_{\perp})$ ⁴, ainsi, $\vec{k}' \cdot \vec{r}' = \vec{k}'_{\perp} \cdot \vec{r}' = 0$ ($\vec{k}' \cdot \vec{v}' = \vec{k}'_{\perp} \cdot \vec{v}' = 0$) où \vec{v}' est la vitesse de la charge dans le nouveau repère. L'invariance de Lorentz entraîne $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{r}' = \omega' t'$. De plus, $k' \cdot v'(t') = \omega'$ car $\vec{k}'_{\perp} \perp \vec{v}'$ dans le nouveau repère, et $v'^\mu = (1, \vec{v}')$. De nouveau (pour une trajectoire arbitraire)

$$j'^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega' t'} = 0, \quad (4.35)$$

et l'expression pour la composante spatiale à trois dimensions peut être obtenue à partir de (4.32)

$$\vec{j}' = \frac{ie}{\omega'} \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \frac{d}{dt'} [\vec{v}'(t')] e^{i\omega' t'} = \frac{ie}{\omega'} \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \vec{a}'(t') e^{i\omega' t'} = \frac{ie}{\omega'} \vec{a}'(\omega'). \quad (4.36)$$

Si maintenant on considère que la phase $\phi'(t) = \omega' t'$ varie peu dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, $\omega'(t'_2 - t'_1) \ll 1$, nous retrouvons le “cut-off” en $\omega' = k'_{\perp} \ll 1/(t'_2 - t'_1) = [a'_0]$ qui est homogène à une accélération propre. Par conséquent,

$$\vec{j}' = \frac{ie}{k'_{\perp}} [\vec{v}'(t'_2) - \vec{v}'(t'_1)]. \quad (4.37)$$

Nous retrouvons la condition 2) du paragraphe précédent 4.4 en utilisant la relation entre $\Delta t = t_2 - t_1$ et $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ (dilatation du temps) qui découle des transformations de Lorentz, soit $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Cette dernière entraîne $k_{\perp} = k'_{\perp} \approx \frac{\gamma}{\Delta t}$. Ce résultat n'est pas surprenant car \vec{k}_{\perp} est perpendiculaire à la vitesse de la charge.

On remarque dans (4.37) l'apparition d'un premier cône de bremsstrahlung le long de la direction de la charge entrante, et d'un deuxième le long de la charge sortante, car celle-ci est déviée de sa trajectoire initiale. En particulier, nous venons de prouver que la nature du courant est indépendante de la ligne d'univers suivie par la charge entre les événements $t_1(t'_1)$ et $t_2(t'_2)$.

L'universalité du “cut-off” est donc démontrée dans le cas général (direction arbitraire du mouvement). Sa nature est classique et se généralise à toute trajectoire. Ici, nous avons décrit

⁴ $\vec{k}' = (0, \vec{k}'_{\perp})$.

les aspects généraux des distributions uniformes en fonction de la rapidité ($\log \Theta$). Comme il sera démontré prochainement, pour que la particule chargée rayonne, il faut que l'angle d'émission soit inférieur à l'angle de diffusion de la charge ($\Theta_\gamma < \Theta_d$) par rapport à sa direction initiale.

En CDQ, la charge change de direction de mouvement ainsi que d'état de couleur ; or, du fait que le courant de couleur se conserve, ce dernier entraîne l'apparition d'un cône de rayonnement aux angles supérieurs à l'angle de diffusion du parton émetteur ($\Theta_g > \Theta_d$). La contrainte ($\Theta_\gamma < \Theta_d$) en EDQ est remplacée par une contrainte angulaire ("Angular Ordering" en anglais) sur les angles des émissions successives des gluons mous en CDQ.

4.5 Section efficace du rayonnement mou

Dans le but de calculer la section efficace du rayonnement mou en EDQ [4][1] (voir Fig. 1), on prend le module au carré de l'amplitude (4.5) que l'on projette sur les états de polarisation (λ) du photon, on effectue la somme sur (λ) en tenant de même en considération l'espace de phase du photon mou

$$dW = e^2 \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\mu^\lambda j^\mu|^2 \frac{\omega^2 d\omega d\Omega_\gamma}{2\omega (2\pi)^3} dW_{el}. \quad (4.38)$$

où $dW_{el} = |M_{el}|^2$. La somme s'effectue sur les deux états de polarisation physiques du photon réel, qui sont décrits par des vecteurs normalisés orthogonaux à la quadri-impulsion k du photon et entre eux, soit

$$\epsilon_\lambda^\mu(k) \cdot \epsilon_{\mu,\lambda'}^*(k) = -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \epsilon_\lambda^\mu(k) \cdot k_\mu = 0; \quad \lambda, \lambda' = 1, 2.$$

Dans ces conditions, les vecteurs de polarisation peuvent être choisis de plusieurs manières. Néanmoins, cette incertitude n'affecte pas le calcul des observables physiques, grâce à l'invariance de jauge. C'est pour celà que le tenseur de polarisation peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_\lambda^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \text{tenseur proportionnel à } k^\mu k^\nu. \quad (4.39)$$

Puisque le courant se conserve $j^\mu k_\mu = 0$, on peut négliger le dernier terme de (4.39). Dans le but de calculer la production des photons mous, au lieu d'utiliser les polarisations physiques, nous pouvons simplement, en vertu de l'invariance de jauge, choisir la plus simple (jauge de Feynman)

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_\lambda^{*\nu} = -g^{\mu\nu}.$$

On définit alors le nombre de photons de bremsstrahlung produits en divisant (4.38) à gauche par le module au carré du terme de Born

$$\begin{aligned} dN \equiv \frac{dW}{dW_{el}} &= -\frac{\alpha}{4\pi^2} (j^\mu)^2 \omega d\omega d\Omega_\gamma \\ &\simeq \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\Omega_\gamma}{2\pi} \frac{1 - \cos \Theta_d}{(1 - \cos \Theta_1)(1 - \cos \Theta_2)}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

où $\alpha = e^2/4\pi$ représente la constante de couplage des interactions électromagnétiques.

Dans (4.40) nous avons pris la limite relativiste $1 - v_1, 1 - v_2 \ll 1$:

$$-(j^\mu)^2 = \frac{2(p_1 \cdot p_2)}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{p_0^2}\right) \right) \simeq \frac{2}{\omega^2} \frac{(1 - \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{(1 - \vec{n}_1 \cdot \vec{n})(1 - \vec{n}_2 \cdot \vec{n})} \quad (4.41)$$

où \vec{n} , \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont des vecteurs unitaires qui représentent les directions du photon émis, de l'électron entrant et de l'électron sortant respectivement par rapport à l'axe Ox. (4.41) ne tient pas compte des contributions dans les régions à très petit angle $\Theta_i^2 \lesssim (1 - v_i^2) = m^2/p_{0i}^2 \ll 1$ car le rayonnement des photons mous s'annule alors ("cône d'extinction"). Si le photon est émis à petit angle par rapport à la particule entrante $\Theta_1 \ll \Theta_2 \simeq \Theta_d$, le spectre du rayonnement (4.40) prend la forme

$$dN \simeq \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin \Theta_1 d\Theta_1}{(1 - \cos \Theta_1)} \frac{d\omega}{\omega} \simeq \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\Theta_1^2}{\Theta_1^2} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (4.42)$$

Deux cônes de bremsstrahlung apparaissent le long des directions de la particule entrante et sortante. A l'intérieur des cônes le rayonnement possède une double dépendance logarithmique qui montre une divergence molle en $d\omega/\omega$ (car le photon est mou) et une autre colinéaire en $d\Theta^2/\Theta^2$ (car le photon est émis à petit angle). Cette double contribution logarithmique (4.42) est un ingrédient dans la construction des équations d'évolution partoniques dans les jets hadroniques (voir les articles C.1, C.2 et C.3). Si l'on choisit les variables

$$\ell = \ln[\omega], \quad y = \ln[\Theta]$$

on récrit (4.42) sous la forme

$$dN \simeq \frac{2\alpha}{\pi} d\ell dy \quad (4.43)$$

que l'on rencontre dans les équations d'évolution partoniques du spectre et des corrélations des particules (3.12,3.13) et (3.35,3.36) dans l'article C.2.

4.6 Introduction à la cohérence

Dans la jauge de Feynman, le terme d'interférence entre les deux émetteurs en (4.40) est dominant, à savoir

$$dN \propto - \left[\frac{p_1^\mu}{(p_1 \cdot k)} - \frac{p_2^\mu}{(p_1 \cdot k)} \right]^2 \approx \frac{2(p_1 \cdot p_2)}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)}. \quad (4.44)$$

On ne peut donc pas déceler quelle partie du rayonnement est associée à la particule chargée entrante ou sortante. Nous considérons alors le calcul détaillé de (4.38) en fonction des polarisations physiques du photon. Dans cet objectif, on se place dans la jauge de radiation (hors sources); dans celle-ci, le tri-vecteur \vec{A} satisfait $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, alors que la composante temporelle est nulle, c'est à dire $A_0 \equiv 0$. Dans cette jauge le photon est donc décrit par deux tri-vecteurs orthogonaux entre eux et à son impulsion, on a

$$(\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{k} = 0). \quad (4.45)$$

Ainsi, il ne reste que deux états de polarisation physiques. On effectue ensuite la somme sur (λ) et on trouve

$$dN \propto \sum_{\lambda=1,2} |\vec{j}(k) \cdot \vec{\epsilon}_\lambda|^2 = \sum_{\alpha,\beta=1\dots 3} \vec{j}^\alpha(k) \cdot [\delta_{\alpha\beta} - \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta] \vec{j}^\beta(k), \quad (4.46)$$

où α, β représentent les trois coordonnées spatiales. On récrit le courant mou (4.6) sous la forme d'un tri-vecteur $p_i^\mu \rightarrow \vec{v}_i p_{0i}$, on utilise les expressions suivantes

$$(\vec{v}_i)_\alpha \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{\vec{k}^2} \right] (\vec{v}_i)_\beta = v_i^2 \sin^2 \Theta_i, \quad (4.47)$$

$$(\vec{v}_1)_\alpha \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{\vec{k}^2} \right] (\vec{v}_2)_\beta = v_1 v_2 (\cos \Theta_{12} - \cos \Theta_1 \cos \Theta_2), \quad (4.48)$$

et on obtient

$$dN = \frac{\alpha}{\pi} \{ \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2\mathcal{J} \} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (4.49)$$

Ici,

$$\mathcal{R}_i = \frac{v_i^2 \sin^2 \Theta_i}{(1 - v_i \cos \Theta_i)^2}, \quad i = 1, 2, \quad (4.50)$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{v_1 v_2 (\cos \Theta_{12} - \cos \Theta_1 \cos \Theta_2)}{(1 - v_1 \cos \Theta_1)(1 - v_2 \cos \Theta_2)}. \quad (4.51)$$

Les contributions $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ (4.50) sont indépendantes ; elle sont attachées au rayonnement de la charge initiale et diffusée respectivement. L'expression du terme d'interférence est donné par \mathcal{J} (4.51). La somme des trois contributions décrit alors l'émission cohérente des photons. On peut également vérifier que (4.49) est équivalente à (4.40) dans la jauge de Feynman, soit

$$\mathcal{R}_{\text{cohér}} \equiv \mathcal{R}_{\text{ indép } } - 2\mathcal{J} = -\omega^2 (j^\mu)^2, \quad \mathcal{R}_{\text{ indép } } \equiv \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2.$$

Remarque : la physique dans ce problème est la même que celle qui explique l'interférence de la lumière quand celle-ci traverse les trous d'Young : l'intensité de la lumière sur un écran situé à une distance finie des orifices (cette distance étant très supérieure à celle qui sépare les trous) est proportionnelle à la somme indépendante des modules au carré du champ électrique et du terme d'interférence.

4.6.1 Le rôle de l'interférence ; contrainte sur les angles d'émission

Dans la limite ultra relativiste ($v_i \rightarrow 1$) on a

$$\mathcal{R}_1 \simeq \frac{\sin^2 \Theta_1}{(1 - \cos \Theta_1)^2} = \frac{2}{a_1} - 1, \quad (4.52)$$

$$\mathcal{J} \simeq \frac{\cos \Theta_{12} - \cos \Theta_1 \cos \Theta_2}{(1 - \cos \Theta_1)(1 - \cos \Theta_2)} = \frac{a_1 + a_1 - a_{12}}{a_1 \cdot a_2} - 1 \quad (4.53)$$

où l'on a introduit les notations $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{n}_i = \frac{\vec{p}_i}{|\vec{p}_i|}$ et

$$a_1 = 1 - \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 1 - \cos \Theta_1, \quad a_2 = 1 - \cos \Theta_2,$$

$$a_{12} = 1 - \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - \cos \Theta_d.$$

Les termes a_i sont négligeables quand les angles deviennent petits $a \simeq \frac{1}{2}\Theta^2$. La contribution apportée par \mathcal{R}_i au rayonnement prend une dépendance logarithmique qui s'étend jusqu'aux limites des grands angles $a \lesssim 1$

$$dN_1 \propto \mathcal{R}_1 \sin \Theta d\Theta \propto \frac{da_1}{a_1}. \quad (4.54)$$

Néanmoins, le terme d'interférence supprime le rayonnement lorsque l'angle d'émission devient supérieur à l'angle de diffusion de la charge

$$dN \propto \mathcal{R}_{\text{cohér.}} \sin \Theta d\Theta = 2a_{12} \frac{da}{a_1 \cdot a_2} \propto \frac{da}{a^2} \propto \frac{d\Theta^2}{\Theta^2}, \quad a_1 \simeq a_2 \gg a_{12}. \quad (4.55)$$

Dans le but de quantifier ces effets de cohérence on écrit les contributions

$$\begin{aligned}
V_1 &= \mathcal{R}_1 - \mathcal{J} = \frac{2}{a_1} - \frac{a_1 + a_2 - a_{12}}{a_1 \cdot a_2} = \frac{a_{12} + a_2 - a_1}{a_1 \cdot a_2}; \\
V_2 &= \mathcal{R}_2 - \mathcal{J} = \frac{2}{a_2} - \frac{a_1 + a_2 - a_{12}}{a_1 \cdot a_2} = \frac{a_{12} + a_1 - a_2}{a_1 \cdot a_2}; \\
\mathcal{R}_{\text{cohér.}} &= V_1 + V_2.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

L'amplitude d'émission V_i peut être encore considérée comme étant associée à la charge i (V_1 est singulier si $a_1 \rightarrow 0$ et *vice versa*). Puisque V_1 dépend de la direction de son partenaire 2, on ne peut pas considérer des probabilités indépendantes mais conditionnelles. Puisque l'émission des photons mous présente une symétrie azimutale, on prend la moyenne de V sur l'angle d'émission du quantum rayonné par rapport à l'angle (\vec{n}, \vec{n}_1) et on en déduit que la probabilité $V_1(\vec{n}, \vec{n}_1; \vec{n}_2)$ s'annule à l'extérieur du cône d'angle d'ouverture Θ_d (angle de diffusion), soit ⁵

$$\langle V_1 \rangle_{\text{azimut}} \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{\vec{n}, \vec{n}_1}}{2\pi} V_1(\vec{n}, \vec{n}_1; \vec{n}_2) = \frac{2}{a_1} \vartheta(a_{12} - a_1). \tag{4.57}$$

Or, a_2 change sous l'intégrale (4.57), tandis que a_1 et a_{12} sont fixés. Le résultat découle de l'intégrale angulaire

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{n, n_1}}{2\pi} \frac{1}{a_2} = \frac{1}{|\cos \Theta_1 - \cos \Theta_d|} = \frac{1}{|a_{12} - a_1|}. \tag{4.58}$$

Nous pouvons conclure que le résultat s'exprime comme la somme des probabilités associées à l'apparition de deux cônes de bremsstrahlung indépendants d'angle d'ouverture $\Theta_d/2$ centrés sur les directions des vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 . Au delà de cette région, la section efficace s'annule, autrement dit, le rayonnement des photons mous est supprimé.

Cette propriété est connu en anglais comme *Angular Ordering* (AO), il s'agit d'une contrainte d'après laquelle les angles sont forcément ordonnés (dans le sens $\Theta_d \geq \Theta_\gamma$); si ce n'était pas le cas, il n'existerait pas d'émission. Cette condition constitue l'un des ingrédients dont on doit tenir compte dans la généralisation des équations de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi, DGLAP [10] aux domaines de petits x (fraction de l'énergie emportée par un parton dans un jets, ex. collisions e^+e^-), à savoir, dans l'approximation MLLA (Modified Leading Logarithmic Approximations) qui décrit la structure interne des jets partoniques en CDQ.

4.7 Interprétation de la contrainte sur les angles d'émission de photons en mécanique quantique relativiste

Pour quelle raison le rayonnement est-il supprimé lorsque l'angle d'émission dépasse l'angle de diffusion ? Pour répondre à cette question nous utilisons quelques aspects essentiels de la mécanique quantique. Un électron physique est une charge entourée de son propre champ coulombien. Du point de vue quantique, le champ coulombien associé à la charge peut être interprété comme un ensemble de photons virtuels émis et aussitôt réabsorbés par celle-ci au bout d'un intervalle de temps fini. Les processus d'émission et de réabsorption virtuels forment un état que l'on appelle "électron physique".

⁵voir le calcul de cette intégrale dans l'appendice A.2.

Cette cohérence est partiellement perturbée lorsque la charge subit une perturbation externe. Par conséquent, une partie des fluctuations intrinsèques du champ stationnaire est rayonnée sous forme de photons réels et, ainsi, un cône de bremsstrahlung apparaît le long de la direction du mouvement initial de la particule. Finalement, dans le processus de régénération du nouveau champ coulombien qui suit la direction finale du mouvement, un deuxième cône de bremsstrahlung apparaît le long de la charge diffusée.

L'intervalle de temps qui s'écoule entre l'émission et la réabsorption du photon de quadri-impulsion k par l'électron de quadri-impulsion p_1 est proportionnel à l'inverse du propagateur de l'état virtuel de quadri-impulsion $(p_1 - k)$ (voir Fig. 1 gauche), soit

$$t_{\text{fluct}} \sim \frac{E_1}{|m^2 - (p_1 - k)^2|} = \frac{E_1}{2p_1 \cdot k} \sim \frac{1}{\omega \Theta^2} \simeq \frac{\omega}{k_{\perp}^2}, \quad (4.59)$$

où l'on a effectué l'approximation des angles colinéaires : $k_{\perp} \approx \omega \Theta \ll k_{\parallel} \approx \omega$. Le temps de la fluctuation peut être important pour de faibles énergies ω et devenir le paramètre fondamental de certains processus en EDQ. On considère un électron qui a diffusé sur un champ électrique externe sous un angle Θ_d par rapport à la direction de sa trajectoire initiale. Que le photon émis soit réabsorbé dépend, en particulier, de la position finale de la particule par rapport à la coordonnée attendue par celle-ci. Nous allons donc comparer le déplacement de la charge $\Delta \vec{r}$ par rapport à la largeur du champ du photon, $\lambda_{\parallel} \sim \omega^{-1}$, $\lambda_{\perp} \sim k_{\perp}^{-1}$ où λ est sa longueur d'onde. On a

$$\Delta r_{\parallel} \sim |v_{2\parallel} - v_{1\parallel}| t_{\text{fluct}} \sim \Theta_d^2 \frac{1}{\omega \Theta^2} = \left(\frac{\Theta_d}{\Theta} \right)^2 \lambda_{\parallel} \Leftrightarrow \lambda_{\parallel}; \quad (4.60)$$

$$\Delta r_{\perp} \sim c \Theta_d t_{\text{fluct}} \sim \Theta_d \frac{1}{\omega \Theta^2} = \left(\frac{\Theta_d}{\Theta} \right) \lambda_{\perp} \Leftrightarrow \lambda_{\perp}. \quad (4.61)$$

Si l'angle de diffusion est grand, $\Theta_d \sim 1$, le déplacement de la charge est supérieur à sa longueur d'onde pour toute valeur de Θ ; les deux cônes de bremsstrahlung apparaissent. Si l'angle de diffusion est petit $\Theta_d \ll 1$, il n'y a que les photons émis à $\Theta \lesssim \Theta_d$ qui peuvent *observer* la déviation de la charge et, par conséquent, réaliser la perturbation de l'état cohérent. C'est pour ces raisons que le rayonnement de bremsstrahlung n'a lieu qu'aux angles qui sont inférieurs à l'angle de diffusion; ceci est équivalent au "cut-off" que l'on trouve pour k_{\perp} dans 4.4.1. Les autres composantes ont une longueur d'onde importante et peuvent être facilement réabsorbées par la particule. Le temps de formation du rayonnement est court aux grands angles d'émission et les photons qui sont émis à $\Theta > \Theta_d$ ne réalisent pas la déviation de la charge. L'origine physique du "cut-off" en k_{\perp} est associée à l'apparition de cette *contrainte* pour les angles $\Theta \lesssim \Theta_d$ (AO) et sera utilisée dans l'intégration des équations d'évolution des observables physiques dans les travaux C.1, C.2 et C.3.

Pour conclure ce paragraphe, on remarque que dans le cas où $\Theta \gg \Theta_d$ (le photon ne réalise pas la déviation de la charge), $p_1 \approx p_2 \approx p$ et, par conséquent, le courant (4.6) s'annule.

4.8 Rayonnement de bremsstrahlung en CDQ

Nous généralisons le courant de bremsstrahlung (4.6) en CDQ pour l'émission des gluons mous en injectant le nouvel ingrédient de la théorie, c'est à dire la couleur. Ainsi, les facteurs de Lorentz ($p_i^{\mu}/p_i \cdot k$) doivent être multipliés par les facteurs de couleur [20] associés à l'interaction quark-gluon, c'est à dire les matrices de Gell-Mann [4] (voir Fig.8)

$$j^{\mu} = \left[t^b t^a \left(\frac{p_1^{\mu}}{(p_1 \cdot k)} \right) - t^a t^b \left(\frac{p_2^{\mu}}{(p_2 \cdot k)} \right) \right]. \quad (4.62)$$

On définit $A_i = \frac{p_i^\mu}{(p_i \cdot k)}$ et on utilise la décomposition

$$t^a t^b = \frac{1}{2N_c} \delta_{ab} + \frac{1}{2} (d_{abc} + i f_{abc}) t^c,$$

que l'on peut récrire sous la forme

$$j^\mu = \frac{1}{2} (A_1 - A_2) \{t^b, t^a\} + (A_1 + A_2) [t^b, t^a] \quad (4.63)$$

$$= \frac{1}{2} (A_1 - A_2) \left(\frac{1}{N_c} \delta^{ab} + d^{abc} t^c \right) - \frac{1}{2} (A_1 + A_2) i f^{abc} t^c. \quad (4.64)$$

Dans l'objectif d'en déduire la probabilité de l'émission, il faut déterminer $j^\mu j_\mu^*$ et effectuer la somme sur les états de couleur. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} \left(\frac{1}{2N_c} \delta_{ab} \right)^2 &= \left(\frac{1}{2N_c} \right)^2 (N_c^2 - 1) = \frac{1}{2N_c} C_F; \\ \sum_{a,b} \left(\frac{1}{2} d_{abc} t^c \right)^2 &= \frac{1}{4} \frac{N_c^2 - 4}{N_c} (t^c)^2 = \frac{N_c^2 - 4}{4N_c} C_F; \\ \sum_{a,b} \left(\frac{1}{2} i f_{abc} t^c \right)^2 &= \frac{1}{4} N_c (t^c)^2 C_F. \end{aligned}$$

Le facteur commun C_F appartient au terme de Born de la section efficace (non-radiative). Le spectre du rayonnement prend la forme

$$\begin{aligned} dN &\propto \frac{1}{C_F} \sum_{\text{couleur}} j^\mu \cdot j_\mu^* = \left(\frac{1}{2N_c} + \frac{N_c^2 - 4}{4N_c} \right) (A_1 - A_2) \cdot (A_1 - A_2) \\ &+ \frac{N_c}{4} (A_1 + A_2) \cdot (A_1 + A_2), \end{aligned} \quad (4.65)$$

que l'on peut simplifier en

$$dN \propto C_F (A_1 - A_2) \cdot (A_1 - A_2) + N_c A_1 \cdot A_2. \quad (4.66)$$

Les points symbolisent la somme que l'on doit effectuer sur les états de polarisation des gluons. Nous utiliserons les projecteurs (4.47) et (4.48) pour déterminer cette somme

$$A_1 \cdot A_2 \equiv \sum_{\lambda=1,2} (A_1 e^{(\lambda)}) (A_2 e^{(\lambda)})^* = \mathcal{J} \quad \{\neq -(A_1 A_2)\}. \quad (4.67)$$

La section efficace se simplifie finalement à l'expression suivante

$$dN \propto C_F \mathcal{R}_{\text{cohér}} + N_c \mathcal{J}. \quad (4.68)$$

Le terme proportionnel à C_F en (4.68) représente les deux cônes de bremsstrahlung que l'on a déjà trouvés dans le cas abélien en EDQ (4.56), ils sont respectivement centrés sur les direction du mouvement du quark entrant et diffusé $\Theta_1, \Theta_2 \leq \Theta_d$ (contrainte sur les angles "AO"). Le deuxième terme, d'origine non-abelienne, est proportionnel à la charge de couleur du gluon. Il a (4.53) comme expression, soit

$$\mathcal{J} = \frac{a_1 + a_1 - a_{12}}{a_1 \cdot a_2} - 1, \quad (4.69)$$

qui reste non-singulier dans la région d'émission aux petits angles $\Theta_1 \ll \Theta_d$, $\Theta_2 \ll \Theta_d$. En même temps, il remplit la région qui correspond aux angles d'émission supérieur à l'angle de diffusion du quark $\Theta = \Theta_1 \approx \Theta_2 \gg \Theta_d$ où

$$dN \propto d\Omega \mathcal{J} \propto \sin \Theta d\Theta \left(\frac{2}{a} - 1 \right) \propto \frac{d\Theta^2}{\Theta^2}. \quad (4.70)$$

Si l'on intègre sur l'angle azimutal autour de la direction de mouvement du quark entrant, on obtient

$$\int \frac{d\phi_1}{2\pi} \mathcal{J} = \frac{1}{a_1} \left(1 + \frac{a_1 - a_{12}}{|a_1 - a_{12}|} \right) = \frac{2}{a_1} \vartheta(\Theta_1 - \Theta_d) - 1. \quad (4.71)$$

C'est ainsi qu'un troisième cône de bremsstrahlung, d'origine non-abelienne apparaît. On peut aussi intuitiver ce résultat sans effectuer les calculs précédents. Pour toute représentation R de $SU(N_c)$, on peut récrire (4.62) sous la forme

$$j^\mu = T^b T^a \frac{p_1^\mu}{p_1 \cdot k} - T^a T^b \frac{p_2^\mu}{p_1 \cdot k} \approx (T^b T^a - T^a T^b) \frac{p^\mu}{p_1 \cdot k}. \quad (4.72)$$

On rappelle la forme générale de la relation de commutation de $SU(N_c)$

$$[T^a(R), T^b(R)] = i \sum_c f_{abc} T^c(R),$$

qui peut se représenter diagrammatiquement sous la forme de la Fig.9

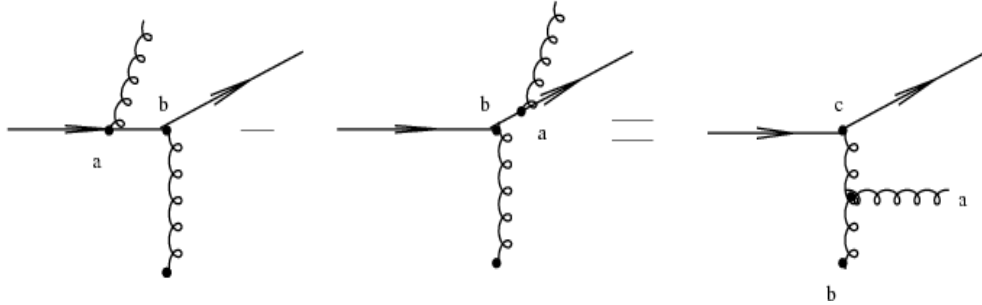


FIG. 9 – Représentation diagrammatique de la relation de commutation

tel que l'on obtient

$$j^\mu (j_\mu)^* \propto (i f_{abc})^2 \propto N_c,$$

qui est le facteur de couleur associé au module au carré du diagramme à droite dans la Fig.9. Ainsi, le rayonnement à $\Theta > \Theta_d$ ne dépend pas de la nature (état de couleur) du projectile. Les gluons de bremsstrahlung se transforment, lorsque les distances entre partons croissent, en hadrons observables. Dans le prochain paragraphe on donne un exemple d'application de ces propriétés à l'identification du canal de production du boson de Higgs.

4.9 Application à l'identification des canaux possibles dans la production du boson de Higgs [21]

Si on utilise la rapidité comme variable, elle vaut $\eta = \ln \Theta^{-1}$ pour les émissions de gluons colinéaires. Ainsi, la distribution logarithmique angulaire (4.70) présente un plateau de rapidité $dN \propto d\eta$.

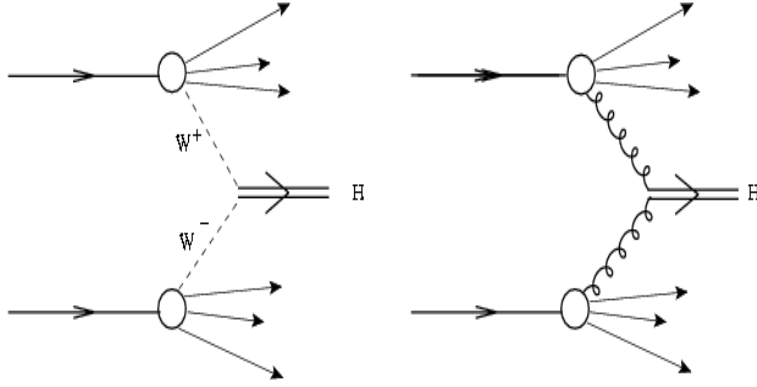


FIG. 10 – Diffusion W^+W^- (gauche) et gg (droite) dans la production du boson de Higgs

Or, à très haute énergie, on connaît deux mécanismes possibles (ou canaux de production) qui interviennent dans la production du boson de Higgs, il s'agit de $W^+W^- \rightarrow H$ et de la fusion gluon-gluon $gg \rightarrow H$ (voir Fig. 10). Puisque l'impulsion transférée est de l'ordre de la masse du boson dans le canal t , $(-t) \sim M_H^2$, sa production est un processus qui fait intervenir les interactions fortes (quark-gluon, anti-quark-gluon, gluon-gluon). Par conséquent, les quarks diffusés, étant soudainement accélérés, rayonnent des gluons de bremsstrahlung. L'angle de diffusion dans ce processus est donné par $\Theta_d^2 \simeq |t|/s \sim M_H^2/s$ (voir appendice A.3). Dans le cas du canal WW , les bosons W n'échangent pas des états de couleur, à savoir les quarks entrants n'échangent que leur état de saveur; ainsi, le courant (4.6) est suffisant pour prédire l'allure de la distribution en fonction de la rapidité des hadrons qui accompagnent le Higgs, à un facteur de couleur près. Dans le cas de la fusion gg , les quarks sortants prennent un autre degré de couleur sous l'échange des gluons. Le courant mou rayonné est donc donné par (4.62). L'allure de la distribution hadronique finale est donnée par un plateau pratiquement uniforme [21] dont la hauteur au centre (η petit ou Θ grand), d'après (4.68), est proportionnelle à N_c . En effet, il n'y a que le terme d'interférence (\mathcal{J}), qui l'emporte dans l'approximation des grands angles (cône de bremsstrahlung d'origine non-abelienne). Si l'on s'éloigne de cette région, soit vers les grandes rapidités (petits angles), c'est à dire vers les régions de fragmentation ($\eta_{\max} > |\eta| > \ln \Theta_d^{-1}$, où $\Theta < \Theta_d$), les deux cônes de bremsstrahlung (comme en EDQ) donnent une densité hadronique proportionnelle à $2 \times C_F \approx N_c$.

Dans le cas WW , il n'y a qu'une contribution, c'est à dire le terme $\propto C_F$ dans (4.68). Un "gap" [21] de rapidité qui s'étend sur l'intervalle $|\eta| < \ln(\sqrt{s}/M_H)$ apparaît dans la région $\Theta_d < \Theta$ alors que la densité hadronique dans la partie $\Theta < \Theta_d$, de largeur $\Delta\eta = \eta_{\max} - \ln \Theta_d \simeq \ln M_H$, est donnée par deux pics de hauteur $\propto C_F$ (soit une densité $\propto 2 \times C_F$). Cet exemple montre comment la CDQ aide à l'identification des canaux de production du Higgs dans le futur LHC (Large Hadron Collider).

5 Approximation Doublement Logarithmique (DLA)

Dans ce chapitre nous commençons l'étude du schéma probabiliste qui a mené au calcul des observables physiques dans les jets hadroniques. Nous donnons, en particulier, les détails techniques exposés par Fadin dans son article [8] sur l'estimation de la section efficace de production de N gluons, où il a développé le schéma de resommation DLA.

Nous considérons en premier le cas le plus simple, à savoir l'annihilation e^+e^- en une paire quark-anti-quark, suivie de l'émission de deux gluons de bremsstrahlung ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g_1g_2$). Nous nous limiterons, dans l'émission de gluons mous, à l'approximation qui néglige le recul de la particule chargée émettrice. Elle ne fait intervenir que les contributions doublement (pour infrarouge et colinéaire) logarithmiques dont on a déjà rencontré la forme au paragraphe 4.5, eq.4.43. Elle constitue le principale ingrédient dans l'estimation des observables physiques que l'on peut mesurer dans les grands collisionneurs des particules (LEP, Tevatron, LHC), sa contribution, étant dominante

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \ll 1, \quad \underbrace{\frac{\alpha_s}{\pi} \log \frac{Q^2}{Q_0^2}}_{LLA} \ll 1, \quad \underbrace{\frac{\alpha_s}{\pi} \log^2 \frac{Q^2}{Q_0^2}}_{DLA} \sim 1.^6 \quad (5.1)$$

Nous décrivons aussi la structure interne des jets hadroniques en imposant des contraintes sur les angles d'émissions des gluons mous, compatibles avec (5.1), de sorte qu'il ne se produise pas d'interférences destructives entre eux (*cohérence* des gluons mous en CDQ, dont on a déjà expliqué l'origine physique au chapitre précédent).

Une bonne compréhension de ces questions nous permettra de construire l'amplitude (M_N) associée à la production de N gluons de bremsstrahlung ; on étendra le cas de la production de deux gluons au cas de l'émission de N gluons $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + Ng$. Nous utiliserons les techniques exposées au chapitre précédent pour simplifier les expressions obtenues. On remarquera à nouveau la factorisation des amplitudes molles (phénomène classique) dans le terme de Born. Nous tiendrons aussi compte des corrections virtuelles à une boucle ; ce résultat sera toutefois donné sans démonstration.

Nous ferons un résumé du formalisme du calcul des jets [5] à l'aide de la Fonctionnelle Génératrice (FG) qui satisfait une Équation Maîtresse (EM) (voir [6] et références incluses). Celle-ci constitue le point de départ dans la construction des équations d'évolution que satisfont les observables inclusives dans les jets hadroniques. Nous nous intéresserons au cas du spectre inclusif d'une particule à l'intérieur d'un jet dans le cadre DLA [9][23] et donnerons les idées, ainsi que les techniques qui facilitent la compréhension des travaux C.1, C.2 et C.3. Nous effectuons, en particulier, le calcul détaillé du spectre par la méthode du col (voir C.3). Nous donnerons, dans le paragraphe 6, les techniques utilisées dans l'article C.2 pour le calcul exacte des corrélations à deux particules à petit x , dans un jet.

5.1 Amplitudes multi-gluoniques à l'ordre des arbres pour la collision

$e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + Ng$ ($N = \text{nombre de gluons mous colinéaires rayonnés}$)

Nous considérons le processus le plus simple en CDQ, soit la collision leptonique $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ à très haute énergie.

Notations et variables utilisées

⁶ Q est la dureté du processus et Q_0 , le "cut-off" (masse du gluon) ou l'impulsion transverse minimale du gluon

$$\begin{aligned}
p_+ &= (E_+, \vec{p}_+) \text{ --- quadri-impulsion du quark } q, \\
p_- &= (E_-, \vec{p}_-) \text{ --- quadri-impulsion de l'anti-quark } \bar{q}, \\
k_i &= (\omega_i, \vec{k}_i) \text{ --- quadri-impulsion du gluon mou } g_i, \\
e_{i\mu}^\lambda &\text{ --- quadri-vecteur de polarisation du gluon mou } (\lambda = 0, \dots, 3), \\
a_i &\text{ --- indice de couleur du gluon } i.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Contrainte énergétique

Dans l'approximation DLA on cherche la contribution logarithmique la plus importante au calcul de la section efficace de production de N gluons de bremsstrahlung [6] :

$$d\sigma_N \propto \int |M_N|^2 \prod_{i=1}^N \frac{d^3 k_i}{2\omega_i} \propto (g_s^2 \log^2)^N \tag{5.3}$$

Dans l'objectif d'isoler une telle contribution, on démontrera que chaque gluon mou et colinéaire apporte deux contributions logarithmiques dont le produit est dominant (voir 5.1). C'est pour cela que les émissions des gluons que l'on considère doivent se succéder de sorte que leur énergie décroisse considérablement pendant l'évolution du jet

$$E_\pm \gg \omega_1 \gg \omega_2 \gg \dots \gg \omega_N. \tag{5.4}$$

En effet, si $\omega_i \sim \omega_k$, il se produirait, au moins, la perte d'une contribution logarithmique molle.

Choix de jauge

Pour simplifier l'analyse des logarithmes colinéaires, nous utiliserons une jauge dite "physique" où le vertex associé au gluon dans les cas $q \rightarrow qg$ et $g \rightarrow gg$ s'annule pour les émissions colinéaires. Il s'agit de la jauge planaire qui a été utilisée dans le cas de la Diffusion Profondément Inélastique [24] ("DIS" en anglais). Dans cette jauge, le propagateur du gluon s'écrit sous la forme

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{d_{\mu\nu}(k)}{k^2 + i\epsilon}, \tag{5.5}$$

où

$$d_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu c_\nu + c_\mu k_\nu}{(k \cdot c)}. \tag{5.6}$$

Nous considérons un vecteur de jauge c_μ proportionnel à la quadri-impulsion totale de la paire e^+e^- , $c_\mu = \alpha(p_+ + p_-)$:

$$\begin{aligned}
c_\mu &= (1, \vec{c}); \quad \vec{c} = 0 \quad \text{dans le référentiel du centre de masse,} \\
\vec{c} &= \frac{\vec{p}_+ + \vec{p}_-}{E_+ + E_-} \quad \text{dans tout autre référentiel,}
\end{aligned}$$

c'est à dire $\alpha = 1/(E_+ + E_-)$. Maintenant on s'intéresse à l'évaluation du produit scalaire $p_+^\mu d_{\mu\nu}(k) p_-^\nu$. Nous avons,

$$p_+^\mu d_{\mu\nu}(k) p_-^\nu = p_+ \cdot p_- - \frac{(p_+ \cdot k)(c \cdot p_-) + (p_+ \cdot c)(k \cdot p_-)}{(k \cdot c)},$$

or

$$k \cdot c = \frac{k \cdot p_+ + k \cdot p_-}{E_+ + E_-}, \quad c \cdot p_+ = c \cdot p_- = \frac{p_+ \cdot p_-}{E_+ + E_-},$$

donc $p_+^\mu d_{\mu\nu}(k) p_-^\nu = 0$. Cette intéressante propriété de la jauge planaire suggère que les quarks q et \bar{q} émettent des gluons indépendamment. Nous pouvons donc traiter les jets comme des objets qui n'interfèrent pas. Dans le cas du "DIS", cette propriété a permis de passer des diagrammes de Feynman aux diagrammes en échelle [24].

Dans le calcul exact de la section efficace du processus (5.3), on doit effectuer une somme sur les états de polarisation "physiques" $e_\mu^{(1)}$ et $e_\mu^{(2)}$ de N gluons "réels" :

$$\left(e_i^{(1,2)}(k_i) \cdot k_i \right) = 0, \quad \left(e_i^{(1,2)} \cdot c \right) = 0, \quad (e)^2 = -1.$$

Dans l'analyse des diagrammes de Feynman on a des gluons virtuels portant les quatre états de polarisations possibles (transverses et longitudinales). Cependant, on va démontrer que l'importance des polarisations longitudinales est négligeable par rapport aux polarisations transverses, autrement dit, la projection des amplitudes sur les états de polarisations transverses (physiques) est dominante par rapport à celle que l'on obtient lorsqu'on les projette sur les états de polarisations longitudinales (non-physiques) $e_\mu^{(0)}$ et $e_\mu^{(3)}$ (voir [6] et références incluses)

$$d_{\mu\nu}(k) = - \sum_{\lambda=0}^3 e_\mu^{(\lambda)}(k) e_\nu^{(\lambda)}(k), \quad (5.7)$$

$$e_\mu^{(0,3)}(k) = \frac{k_\mu \pm \sqrt{k^2} c_\mu}{\left[2\omega(\omega \pm \sqrt{k^2}) \right]^{1/2}}. \quad (5.8)$$

5.2 Amplitude du processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g_1g_2$

Les diagrammes de la Fig.11 sont du même type qu'en EDQ pour le processus que l'on considère. L'expression des amplitudes est obtenue à partir des règles de Feynman [1][2] :

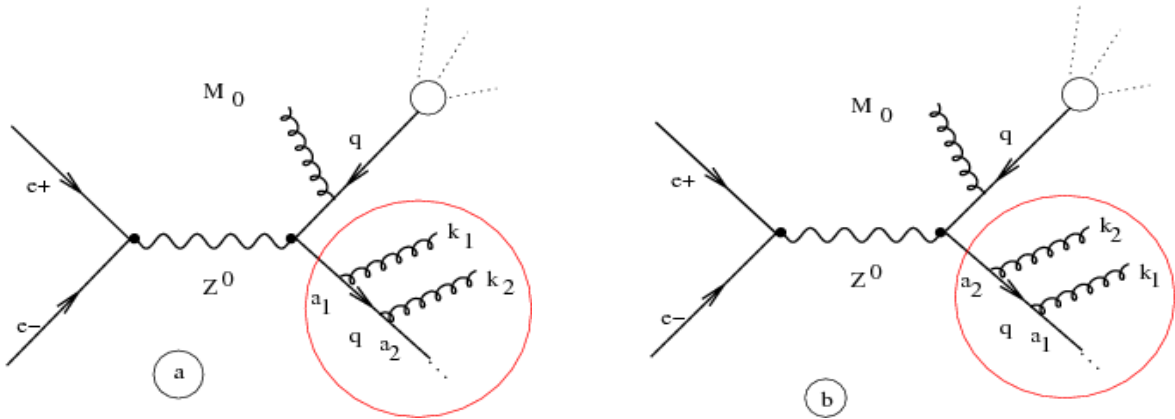


FIG. 11 – Processus considéré, $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g_1g_2$ à gauche et $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g_2g_1$ à droite.

$$\begin{aligned} \widetilde{M}^a &= M_0(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) \frac{m + \not{p}_+ - \not{k}_1 - \not{k}_2}{m^2 - (p_+ - k_1 - k_2)^2} g_s t^{a_2} \gamma^\mu e_{2,\mu}(k_2) \\ &\quad \frac{m + \not{p}_+ - \not{k}_1}{m^2 - (p_+ - k_1)^2} g_s t^{a_1} \gamma^\nu e_{1,\nu}(k_1) u(p_+, s_+), \end{aligned} \quad (5.9a)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^b &= M_0(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) \frac{m + \not{p}_+ - \not{k}_2 - \not{k}_1}{m^2 - (p_+ - k_2 - k_1)^2} g_s t^{a_1} \gamma^\mu e_{1,\mu}(k_1) \\ &\quad \frac{m + \not{p}_+ - \not{k}_2}{m^2 - (p_+ - k_2)^2} g_s t^{a_2} \gamma^\nu e_{2,\nu}(k_2) u(p_+, s_+),\end{aligned}\quad (5.9b)$$

En CDQ on doit ajouter une amplitude supplémentaire, Fig.12, où l'on inclut le couplage

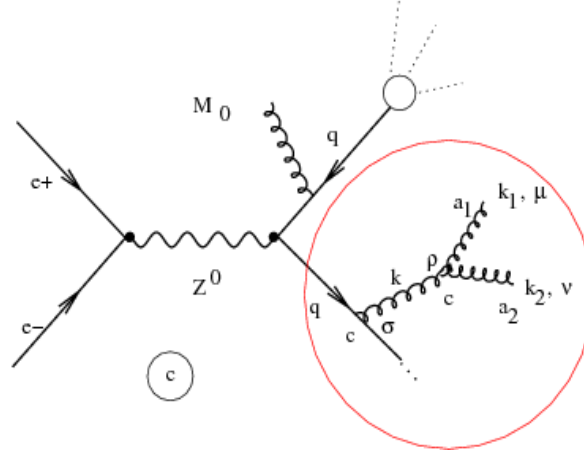


FIG. 12 – Processus considéré, $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g_1g_2$ avec un vertex à trois gluons, déjà évoqué au chapitre précédent

non-abelien à trois gluons,

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^c &= M_0(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) \frac{m + (\not{p}_+ - \not{k})}{m^2 - (p_+ - k)^2} g_s \gamma^\sigma \frac{d_{\rho\sigma}(k)}{k^2} \\ &\quad i f_{a_1 a_2 c} t^c g_s e_1^\mu(k_1) e_2^\nu(k_2) \gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k) u(p_+, s_+),\end{aligned}\quad (5.9c)$$

$\gamma_{\mu\nu\rho}$ est le facteur de Lorentz associé au vertex non-abelien [20]

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3) &= g_{\mu\nu}(k_2 - k_1)_\rho + g_{\rho\mu}(k_1 - k_3)_\nu + g_{\nu\rho}(k_3 - k_2)_\mu \\ &= g_{\mu\nu}(k_2 - k_1)_\rho + g_{\rho\mu}(2k_1 + k_2)_\nu - g_{\nu\rho}(k_1 + 2k_2)_\mu.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Nous simplifions (5.9a) en utilisant les astuces du paragraphe (4.1) pour l'émission de gluons

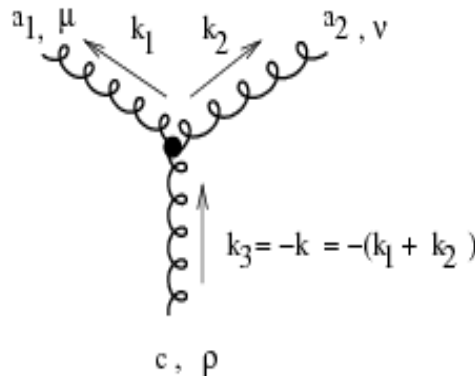


FIG. 13 – Vertex à trois gluons.

de bremsstrahlung ($\omega_i \ll E_{\pm}$). Dans ce cas on effectue une suite de transformations qui négligent le recul des partons

$$\begin{aligned} m + \not{p}_+ - \not{k}_1 - \not{k}_2 &\approx m + \not{p}_+ - \not{k}_1 \approx m + \not{p}_+, \\ m^2 - (p_+ - k_1)^2 &= m^2 - p_+^2 + 2k_1 \cdot p_+ - k_1^2 \approx 2(k_1 \cdot p_+), \\ (m + \not{p}_+)\gamma^\nu e_{1,\nu}(k_1)u(p_+, s_+) &= [2p_+^\nu e_{1,\nu}(k_1) + \gamma^\nu e_{1,\nu}(k_1)(m - \not{p}_+)]u(p_+, s_+) \\ &= 2(e_1 p_+)u(p_+, s_+), \\ m^2 - (p_+ - k_1 - k_2)^2 &= m^2 - p_+^2 + 2(k_1 + k_2) \cdot p_+ - k_1^2 - k_2^2 \approx 2(k_1 + k_2) \cdot p_+, \end{aligned}$$

et finalement

$$(m + \not{p}_+)\gamma^\mu e_{2,\mu}(k_2)u(p_+, s_+) = 2(e_2 \cdot p_+)u(p_+, s_+).$$

L'amplitude de la Fig. 11 à gauche prend la forme $\widetilde{M}^a = M_0 u(p_+, s_+) M^a$ où

$$M^a = g_s^2 \frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+} \frac{e_1 \cdot p_+}{(k_1 + k_2) \cdot p_+} t^{a_2} t^{a_1} \quad (5.11)$$

est l'amplitude associée au processus mou, tandis que $M_0 u_+$ est le terme de Born. L'amplitude de la Fig. 11 à droite s'obtient par une simple permutation des indices 1 et 2, soit $\widetilde{M}^b = M_0 u(p_+, s_+) M^b$, où

$$M^b = g_s^2 \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} \frac{e_2 \cdot p_+}{(k_2 + k_1) \cdot p_+} t^{a_1} t^{a_2}. \quad (5.12)$$

Nous constatons encore une fois la factorisation du terme de bremsstrahlung de la partie non-radiative. On trouve de plus, dans (5.11) et (5.12), le produit de deux facteurs de Lorentz de la forme $\frac{p_i^\mu}{(k p_i)}$ qui correspondent aux émissions indépendantes des deux gluons. En effectuant les mêmes simplifications on arrive à l'expression $\widetilde{M}^c = M_0 u(p_+, s_+) M^c$, où

$$M^c = g_s^2 e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k) \frac{d^{\rho\sigma}(k)}{k^2} \frac{p_{+\sigma}}{k \cdot p_+} i f_{a_1 a_2 c} t^c. \quad (5.13)$$

L'intégration sur les directions des émissions des gluons \vec{n}_i (voir 4.6.1) n'apparaît que dans les dénominateurs des propagateurs de Feynman (quarks, gluon virtuel) car $d^{\rho\sigma}(k)$ ne présente pas de dépendance angulaire dans le dénominateur. Par conséquent, les régions cinématiques où les intégrations sur les directions \vec{n}_1 et \vec{n}_2 donnent les contributions logarithmiques d'origine molle et colinéaire les plus importantes sont les suivantes :

$$k_1 \cdot p_+ \approx \frac{E_+}{2} \omega_1 \Theta_1^2 \gg k_2 \cdot p_+ \approx \frac{E_+}{2} \omega_2 \Theta_2^2 \iff \Theta_1^2 \gg \frac{\omega_2}{\omega_1} \Theta_2^2, \quad (5.14a)$$

$$k_2 \cdot p_+ \approx \frac{E_+}{2} \omega_2 \Theta_2^2 \gg k_1 \cdot p_+ \approx \frac{E_+}{2} \omega_1 \Theta_1^2 \iff \Theta_2^2 \gg \frac{\omega_1}{\omega_2} \Theta_1^2, \quad (5.14b)$$

$$k \cdot p_+ \approx \frac{E_+}{2} (\omega_1 \Theta_1^2 + \omega_2 \Theta_2^2), \quad k^2 \approx \omega_1 \omega_2 \Theta_{12}^2; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} \Theta_1^2 \gg \Theta_2^2 \gtrsim \Theta_1^2, \quad (5.14c)$$

pour les amplitudes (5.11), (5.12) et (5.13) respectivement, avec, $\Theta_i = (\vec{k}_i, \vec{p}_+)$, $\Theta_{12} = (\vec{k}_1, \vec{k}_2)$.

Exemple : Avec (5.14a), le dénominateur de (5.11) s'estime sans difficulté

$$\frac{1}{(k_2 \cdot p_+)} \times \frac{1}{(k_1 + k_2) \cdot p_+} \simeq \frac{1}{\omega_2 \Theta_2^2 (\omega_1 \Theta_1^2 + \omega_2 \Theta_2^2)} \sim \frac{1}{\omega_1 \Theta_1^2} \times \frac{1}{\omega_2 \Theta_2^2}.$$

Après avoir pris le module au carré et avoir intégré sur l'espace de phase on peut écrire l'expression de la section efficace de façon symbolique

$$d\sigma_2 \propto \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 \int \left(\frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\Theta_1^2}{\Theta_1^2}\right) \int \left(\frac{d\omega_2}{\omega_2} \frac{d\Theta_2^2}{\Theta_2^2}\right) \sim \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \log^2\right)^2.$$

Ainsi, pour $N = 2$, on a $(\log^2)^2$, soit, deux contributions molles et colinéaires, soit $(\log^2)^2$ dans le calcul de la section efficace $d\sigma_2$ du processus, c'est à dire la plus grande contribution logarithmique. Si l'on prend $\omega_1\Theta_1^2 \sim \omega_2\Theta_2^2$ où $\omega_1\Theta_1^2 \ll \omega_2\Theta_2^2$ (on fait croître l'angle Θ_2 considérablement dans les deux cas car $\omega_1 \gg \omega_2$) on obtiendrait

$$\frac{1}{(k_2 \cdot p_+)} \times \frac{1}{(k_1 + k_2) \cdot p_+} \sim \left(\frac{1}{\omega_2\Theta_2^2}\right)^2,$$

dans lequel se produit la perte d'une contribution logarithmique. C'est pour celà que l'on doit ajouter l'amplitude (5.12) qui est compatible avec la contrainte (5.14b). Avec la condition (5.14c) pour l'amplitude (5.13), on obtient une double contribution logarithmique à condition que Θ_2 soit supérieur à Θ_1 , c'est à dire $\Theta_2 \gtrsim \Theta_1$. Dans le cas contraire, si on fait croître Θ_2 ($\Theta_2 \gg \Theta_1$) jusqu'à la limite $\omega_1\Theta_1^2 \sim \omega_2\Theta_2^2$ on aurait $\Theta_2 \sim \Theta_{12}$, et on perdrait un log d'origine colinéaire.

On doit donc simplifier (5.13) et démontrer que le résultat peut se mettre sous la forme (5.11) et (5.12). On utilise la condition (5.14c) pour estimer les états de polarisation du gluon virtuel k . On tient compte de la contrainte $\omega_1 \gg \omega_2 \iff k_1 \gg k_2$, $k = k_1 + k_2 \approx k_1$. On oriente le vecteur \vec{k} le long de l'axe \vec{u}_z , ainsi \vec{k}_1 , \vec{k}_2 et \vec{k} se trouvent sur le même plan (\vec{u}_x, \vec{u}_z) . Avec ceci, les états de polarisations transverses du gluon virtuel sont sur le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . Avant de passer au calcul, on donne les outils suivants

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \text{ on projète sur } \vec{k}_2 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{k}_2 = |\vec{k}| \omega_2 \cos(\vec{k}, \vec{k}_2) = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + \omega_2^2 \approx \omega_1\omega_2 \cos \Theta_{12},$$

puis, si l'on néglige la virtualité du gluon, on obtient $(\vec{k}, \vec{k}_2) \approx \Theta_{12}$. De plus, les polarisations transverses des gluons quasi-réels se localisent sur un plan perpendiculaire aux vecteurs \vec{k}_i . On projette d'abord le quadri-vecteur $e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho}$ sur les états de polarisations transverses du gluon virtuel ⁷

$$\begin{aligned} e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k) e_\rho^{(1,2)}(k) &\approx -(e_1 \cdot e_2) [e^{(1,2)}(k) \cdot k_1] + 2[e_1 \cdot e^{(1,2)}(k)][e_2 \cdot k_1] \\ &- [e_2 \cdot e^{(1,2)}(k)](e_1 \cdot k_1) = 2[e_1^{(1,2)} \cdot e^{(1,2)}(k)](e_2 \cdot k_1) \\ &\approx 2(e_2 \cdot k_1) = 2(e_2^{(1,2)} \cdot k_1) \sim \omega_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta_{12}\right) \\ &\sim \omega_1 \Theta_{12}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Finalement (voir (5.8))

$$e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k) e_\rho^{(1,2)}(k) \sim \omega_1 \Theta_{12} \gg \sqrt{\omega_1 \omega_2 \Theta_{12}^2} \approx \sqrt{k^2} \sim e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho} e_\rho^{(0,3)}(k). \tag{5.16}$$

On s'intéresse maintenant à la projection de l'impulsion du quark émetteur sur les états de polarisations transverses du gluon intermédiaire (k) :

$$e_\sigma^{(1,2)}(k) p_+^\sigma = E_+ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \approx E_+ \Theta \sim E_+ \Theta_1, \tag{5.17}$$

⁷ dans (5.15) on démontre que le terme du milieu dans (5.10) est dominant.

on utilise la contrainte (5.14c), et l'on peut écrire ($\Theta \sim \Theta_1$)⁸

$$\begin{aligned} e_{\sigma}^{(1,2)}(k)p_{+}^{\sigma} &\sim E_{+}\Theta_1 \sim \frac{E_{+}}{\omega_1}(\omega_1\Theta_1 + \omega_2\Theta_2) \gg \frac{E_{+}}{\omega_1}(\omega_1\Theta_1^2 + \omega_2\Theta_2^2 \pm \sqrt{\omega_1\omega_2\Theta_{12}^2}) \\ &\sim \frac{(p_{+} \cdot k) \pm \sqrt{k^2}(p_{+} \cdot c)}{\omega} \sim e_{\sigma}^{(0,3)}(k)p_{+}^{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Les inégalités (5.16) et (5.18) permettent de négliger les polarisations longitudinales par rapport aux polarisations transverses du gluon virtuel. Par conséquent, le propagateur $d_{\rho\sigma}$ dans l'amplitude (5.13) peut être remplacé par le tenseur transverse

$$g_{\rho\sigma}^{\perp} \equiv - \sum_{\lambda=1,2} e_{\rho}^{(\lambda)}(k) e_{\sigma}^{(\lambda)}(k), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} g_{\rho 0} &= g_{0\sigma} = g_{00} = 0, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

et le vertex du gluon est dominé par le terme $\propto g_{\rho\mu}$ tel qu'il a été démontré dans (5.15)

$$\gamma_{\mu\nu\sigma}(k_1, k_2, -k) \approx 2g_{\mu\rho}k_{1\nu},$$

puis

$$\begin{aligned} e_1^{\mu} e_2^{\nu} \gamma_{\mu,\nu\sigma}(k_1, k_2, -k) d_{\rho\sigma} p_{+}^{\sigma} &\approx 2(e_2 \cdot k) e_1^{\mu} g_{\rho\sigma}^{\perp} p_{+}^{\sigma} \\ &= 2(e_2 \cdot k) \left[-(\vec{e}_1 \cdot \vec{p}_{+}) + \frac{(\vec{e}_1 \cdot \vec{k})(\vec{k} \cdot \vec{p}_{+})}{\vec{k}^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Maintenant on utilise (5.14c), $\vec{e}_1 \cdot \vec{k} = \vec{e}_1 \cdot \vec{k}_2 \approx \omega_2 \Theta_{12}$, $\vec{k} \cdot \vec{p}_{+} \approx E_{+} \omega_1$, $\vec{k}^2 \approx \omega_1^2$,

$$(\vec{e}_1 \cdot \vec{p}_{+}) = E_{+} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta_1\right) \approx E_{+} \Theta_1 \gg \frac{(\vec{e}_1 \cdot \vec{k})(\vec{k} \cdot \vec{p}_{+})}{\vec{k}^2} \sim E_{+} \frac{\omega_2}{\omega_1} \Theta_{12},$$

on peut donc négliger le second terme à l'intérieur des crochets dans (5.20) et récrire

$$e_1^{\mu} e_2^{\nu} \gamma_{\mu,\nu\sigma}(k_1, k_2, -k) d_{\rho\sigma} p_{+}^{\sigma} \approx -2(e_2 \cdot k_1)(\vec{e}_1 \cdot \vec{p}_{+}) = 2(e_2 \cdot k_1)(e_1^{\mu} g_{\mu\sigma} p_{+}^{\sigma}) = 2(e_2 \cdot k_1)(e_1 \cdot p_{+}).$$

Avec ceci, $k^2 \approx 2k_1 \cdot k_2$, $k \cdot p_{+} = (k_1 + k_2) \cdot p_{+}$, et on obtient

$$M^c = g_s^2 \frac{e_2 \cdot k_1}{k_1 \cdot k_2} \frac{e_1 \cdot p_{+}}{(k_1 + k_2) \cdot p_{+}} i f_{a_1 a_2 c} t^c. \quad (5.21)$$

5.3 Contrainte angulaire pour $N = 2$ (nombre de gluons rayonnés)

Les amplitudes (5.11), (5.12) et (5.21) peuvent se simplifier davantage si l'on utilise les contraintes sur les angles d'émission liées à la cohérence. Par exemple, les régions d'intégration (5.14a) et (5.14c) se chevauchent et les amplitudes correspondantes (5.11) et (5.21) interfèrent. On démontre qu'en utilisant les contraintes angulaires indépendantes suivantes, on élimine ces interférences (on appelle $\Theta_{q\bar{q}} \equiv \Theta_{\pm}$) :

$$I. \quad \Theta_{\pm} > \Theta_1 \gg \Theta_2, \quad (5.22a)$$

⁸dans tous les cas Θ , Θ_1 , Θ_2 et $\Theta_{12} \ll 1$.

$$II. \quad \Theta_{\pm} > \Theta_2 \gg \Theta_1, \quad (5.22b)$$

$$III. \quad \Theta_{12} \ll \Theta_1 \approx \Theta_2 < \Theta_{\pm}. \quad (5.22c)$$

Dans la région I , la seule contribution est donnée par l'amplitude M^a ; cette région angulaire est bien compatible avec la contrainte (5.14a). Dans cette configuration, les deux gluons mous n'interfèrent pas et les deux émissions sont indépendantes. En effectuant l'approximation $k_1 p_+ \gg k_2 p_+$, on peut simplifier M^a

$$M_I = g_s^2 \frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+} \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} t^{a_2} t^{a_1}.$$

La contrainte II se divise en deux sous-régions cinématiques possibles :

$$\Theta_2^2 \gg \frac{\omega_1}{\omega_2} \Theta_1^2, \quad \Theta_1 \text{ doit être très petit car } \frac{\omega_1}{\omega_2} \gg 1$$

et

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \Theta_1^2 \gg \Theta_2^2 \gg \Theta_1^2, \quad \text{pourvu que } \omega_1 \gg \omega_2.$$

Dans le premier cas (le même que 5.14b), il n'y a que M^b qui domine, avec $k_2 \cdot p_+ \gg k_1 \cdot p_+$, et on peut écrire

$$M_{II} = g_s^2 \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} \frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+} t^{a_1} t^{a_2}. \quad (5.23)$$

Dans la deuxième sous-région on doit tenir compte des amplitudes M^a et M^c puisqu'elles sont compatibles avec (5.14a) et (5.14b) respectivement. Cependant, $\Theta_{12} \approx \Theta_2$ car \vec{k}_1 et \vec{p}_+ sont quasi-colinéaires. Ceci permet d'estimer

$$\frac{e_2 \cdot k_1}{k_2 \cdot k_1} \approx \frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+}, \quad k_1 \cdot p_+ \gg k_2 \cdot p_+.$$

On évalue la somme $M^a + M^c$ dans cette approximation, soit

$$\begin{aligned} M^a + M^c &\approx g_s^2 \frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+} \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} [t^{a_2} t^{a_1} + i f_{a_1 a_2 c} t^c] \\ &= g_s^2 \frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+} \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} t^{a_1} t^{a_2} \equiv M_{II}. \end{aligned}$$

Donc (5.23) a lieu dans toute la région cinématique que l'on considère⁹. Finalement, l'amplitude M^c domine dans la région III où la paire $g_1 g_2$ est considérée quasi-colinéaire. Ici $k_1 \cdot p_+ \gg k_2 \cdot p_+$ et on a

$$M_{III} = g_s^2 \frac{e_2 \cdot k_1}{k_2 \cdot k_1} \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} i f_{a_1 a_2 c} t^c.$$

En effet, l'amplitude totale associée à l'émission des gluons mous dans ce processus est donnée par la somme des 3 amplitudes

$$\begin{aligned} M_2^{\text{tot}} = M_I + M_{II} + M_{III} &= g_s^2 \left[\frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+} \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} t^{a_2} t^{a_1} + \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} \frac{e_2 \cdot p_+}{k_2 \cdot p_+} t^{a_1} t^{a_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e_2 \cdot k_1}{k_2 \cdot k_1} \frac{e_1 \cdot p_+}{k_1 \cdot p_+} i f_{a_1 a_2 c} t^c \right], \quad (5.24) \end{aligned}$$

⁹il s'agit du même cas qui s'applique à la production du boson de Higgs, voir 4.9.

mais elle se réduit à $M_2^{\text{tot}} = M_I$ dans la région I , à $M_2^{\text{tot}} = M_{II}$ dans la région II et/ou à $M_2^{\text{tot}} = M_{III}$ dans la région III . Ces aspects ont également été traités dans [6].

L'idée de l'approximation DLA consiste à considérer tous les diagrammes dont la contribution au calcul de la section efficace est doublement logarithmique (gluons mous et colinéaires), dans une configuration bien précise pour les angles d'émission. On peut en faire le bilan en précisant les étapes de la chaîne de transformations qui conduisent aux résultats.

* Fig.11a(b) : le quark de quadri-impulsion p_+ émet d'abord un gluon $k_1(k_2)$, puis $k_2(k_1)$; on attribue la contrainte angulaire $I(II)$ à ce diagramme ; en outre, $E_+ \gg \omega_1 \gg \omega_2$;

* Fig.12c : le quark émet un gluon k_1 qui, à son tour, émet le gluon de plus faible impulsion k_2 ; on lui attribue la contrainte angulaire III ;

* on associe un facteur de Lorentz classique de la forme $\frac{e \cdot p}{k \cdot p}$ à chaque émission molle ;

* les angles d'émission sont contraints de diminuer le long de la chaîne des émissions (contrainte angulaire) ;

* on associe un facteur de couleur à chaque diagramme.

Ceci se généralise aux émissions des gluons par l'anti-quark.

5.4 Contrainte angulaire à tous les ordres

Dans la Fig.14 on considère l'émission de N gluons de bremsstrahlung dans un jet initié par un parton i qui a été émis par le quark q ou l'anti-quark \bar{q} . Chaque point le long de i représente un vertex à trois partons où l'on appelle i le parent et j l'enfant, tel que $i \rightarrow i + j$, on a $j = p_1, p_2, \dots$ (p labelle le père). L'énergie de chaque gluon virtuel le long de chaque branche est considérée du même ordre de grandeur, ce qui est en accord avec la condition (5.4), en d'autres mots, on néglige le recul des gluons émetteurs (c'est pour cela que l'on dessine des lignes droites continues). De plus, on associe la région $\Gamma_{\mathcal{V}_{ba}}$ à l'espace des angles d'émission qui correspond à \mathcal{V}_{ba} : le vertex $a \rightarrow a + b$, tel que si $a = i$, on a $i \rightarrow i + j$ le long de i et si $a = j$, alors $j \rightarrow j + f$ le long de j (f le parton enfant). Les angles des gluons rayonnés doivent décroître le long de la branche choisie en vertu de la cohérence des gluons mous. Cette contrainte doit être satisfaite à compter du vertex $\gamma^*/Z^0 \rightarrow q\bar{q}$. On a, d'après la contrainte angulaire, et pour chaque vertex, le long de la même branche :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{V}_{p_1\pm}}(k_{p_1}, \Theta_{p_1\pm}) : \{k_{p_1}^0 \equiv \omega_{p_1} \ll E_{\pm}; \Theta_{p_1\pm} \ll \Theta_{\pm}; k_{\perp p_1} \approx \omega_{p_1} \Theta_{p_1\pm} > Q_0\}; \quad \text{si } i = q(\bar{q}), \\ \Gamma_{\mathcal{V}_{f_{11}p_1}}(k_{f_{11}}, \Theta_{f_{11}p_1}) : \{k_{f_{11}}^0 \equiv \omega_{f_{11}} \ll \omega_{p_1}; \Theta_{f_{11}p_1} \ll \Theta_{p_1i}; k_{\perp f_{11}} \approx \omega_{f_{11}} \Theta_{f_{11}p_1} > Q_0\}, \quad (5.25) \\ \dots \\ \Gamma_{\mathcal{V}_{f_{1m}p_1}}(k_{f_{1m}}, \Theta_{f_{1m}p_1}) : \{k_{f_{1m}}^0 \equiv \omega_{f_{1m}} \ll \omega_{p_1}; \Theta_{f_{1m}p_1} \ll \Theta_{f_{1m-1}p_1}; k_{\perp f_{1m}} \approx \omega_{f_{1m}} \Theta_{f_{1m}p_1} > Q_0\}, \end{aligned}$$

Θ_{ba} est l'angle d'émission du gluon b par rapport à son parton parent a d'impulsion k_a , Θ_{\pm} est l'angle entre le quark et l'anti-quark. (5.25) se généralise à chaque émission molle $j = p_1, p_2, \dots$. On associe à toute la branche \mathcal{B}_{ji} l'espace des angles $\Gamma_{\mathcal{B}_{ji}}$ qui est donné par l'union de toutes les régions angulaires attribuées à chaque vertex :

$$\Gamma_{\mathcal{B}_{p_1i}}(k_{p_1i}, \Theta_{p_1i}) = \Gamma_{\mathcal{V}_{p_1i}}(k_{p_1}, \Theta_{p_1i}) \cup \Gamma_{\mathcal{V}_{f_{11}p_1}}(k_{f_{11}}, \Theta_{f_{11}p_1}) \cup \dots \cup \Gamma_{\mathcal{V}_{f_{1m}p_1}}(k_{f_{1m}}, \Theta_{f_{1m}p_1}), \quad (5.26)$$

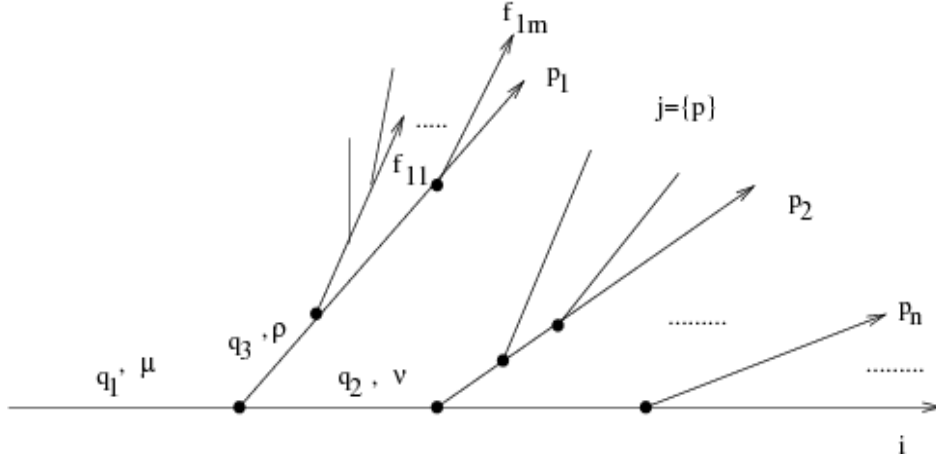


FIG. 14 – Schéma de multiplication d'un gluon émis par q ou \bar{q}

tandis que

$$\Gamma_{\mathcal{V}_{p_1 i}}(k_{p_1}, \Theta_{p_1 i}) \cap \Gamma_{\mathcal{V}_{f_{11} p_1}}(k_{f_{11}}, \Theta_{f_{11} p_1}) \cap \dots \cap \Gamma_{\mathcal{V}_{f_{1m} p_1}}(k_{f_{1m}}, \Theta_{f_{1m} p_1}) = 0 \quad (5.27)$$

traduit leur indépendance, c'est à dire que les régions ne se chevauchent pas. (5.26) et (5.27) se généralisent $\forall j$. Cette branche constitue un jet. L'angle Θ_{ji} est très supérieur à la dimension angulaire du jet et également aux angles d'émission des gluons mous qui le constituent. On peut de même écrire la condition suivante pour les angles, qui découle de (5.26) et (5.27)

$$(\vec{k}_j, \vec{k}_i) \gg (\vec{k}_{f_{j1}}, \vec{k}_j) \gg (\vec{k}_{f_{j2}}, \vec{k}_j) \gg \dots (\vec{k}_{f_{jm}}, \vec{k}_j). \quad (5.28)$$

On appelle $\Gamma_{\mathcal{D}}$ la région entière donnée par l'union de toutes les branches p_1, p_2, \dots, p_n et, par conséquent, associée à la production de N gluons (pour tout le diagramme \mathcal{D}) :

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(k_{p_1 i}, \Theta_{p_1 i}) = \Gamma_{\mathcal{B}_{p_1 i}}(k_{p_1}, \Theta_{p_1 i}) \cup \Gamma_{\mathcal{B}_{p_2 i}}(k_{p_2}, \Theta_{p_2 i}) \cup \dots \cup \Gamma_{\mathcal{B}_{p_n i}}(k_{p_n}, \Theta_{p_n i}),$$

tel que

$$\Gamma_{\mathcal{B}_{p_1 i}}(k_{p_1}, \Theta_{p_1 i}) \cap \Gamma_{\mathcal{B}_{p_2 i}}(k_{p_2}, \Theta_{p_2 i}) \cap \dots \cap \Gamma_{\mathcal{B}_{p_n i}}(k_{p_n}, \Theta_{p_n i}) = 0,$$

ou encore,

$$1 \gg (k_{p_1}, \vec{p}_{\pm}) \gg \dots \gg (k_{p_n}, \vec{p}_{\pm}) \quad \text{si } i = q(\bar{q}), \quad (5.29)$$

sinon

$$1 \gg (k_{p_1}, \vec{k}_i) \gg \dots \gg (k_{p_n}, \vec{k}_i) \quad \text{pour } i \neq q(\bar{q}). \quad (5.30)$$

On multiplie maintenant par le facteur de couleur \mathcal{G} associé à chaque vertex : t^a pour $q(\bar{q}) \rightarrow q(\bar{q}) + g$ et $if_{a_1 a_2 c}$ pour $g \rightarrow gg$, où $a_1(a_2)$ représente le gluon le moins (plus) énergétique. Finalement, on attribue au diagramme de la Fig.14 l'élément de matrice suivant dans la région $\Gamma_{\mathcal{D}}(k \equiv \mathcal{P}, \Theta \gtrsim \Theta_{p_1 i})$, c'est à dire dans la région $\Gamma_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}, \Theta)$:

$$M_N = g_s^N (-1)^m \prod_{i=1}^N \frac{(e_i \mathcal{P}_i)}{(k_i \mathcal{P}_i)} \mathcal{G}, \quad (5.31)$$

où m est le nombre de gluons émis par \bar{q} . Nous rappelons qu'il n'y a pas d'interférence entre les émissions issues du quark et de l'anti-quark. Nous avons considéré l'union de toutes les branches comme un seul jet d'angle d'ouverture légèrement supérieur à l'angle de la première émission, soit p_1 .

Remarque : \mathcal{P}_i est l'impulsion de l'un des partons "réels" finaux et non pas celle d'un état virtuel. L'équation 5.31 représente ce que l'on appelle "soft insertion rules" en anglais [22].

Pour le cas $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + Ng$ nous allons suivre la même démarche que pour le cas $N = 2$. Dans un premier temps nous allons simplifier le mieux possible les diagrammes de Feynman dans la région qui donne une contribution doublement logarithmique, en utilisant la jauge planaire et les polarisations transverses des gluons finaux. Dans la deuxième partie nous démontrerons que la somme des contributions des diagrammes de Feynman dans chacune des régions de (5.25)-(5.30) donne (5.31).

Première partie de la démonstration

On considère les propagateurs des états virtuels dans la ligne i (voir Fig.14) car ce sont les seuls qui donnent une dépendance logarithmique angulaire. On a $i = 0, 1, \dots, N$, où 0 correspond au quark ou l'anti-quark. Les propagateurs ont la forme $q_i^2 = (\sum_t k_t)^2$. Puisque la particule i a l'énergie la plus importante, d'après la condition (5.4) $\omega_i \gg \omega_{p_1}, \omega_{p_2}$, on a

$$k_i \cdot (k_{p_1} + k_{p_2}) \sim \omega_i(\omega_{p_1}\Theta_{p_1i}^2 + \omega_{p_2}\Theta_{p_2i}^2) \gg \omega_{p_1}\omega_{p_2}(\Theta_{p_1i}^2 + \Theta_{p_2i}^2) \gtrsim \omega_{p_1}\omega_{p_2}\Theta_{p_1p_2}^2 \sim k_{p_1}k_{p_2},$$

qui se généralise à toute émission arbitraire j . Dans le cas général nous pouvons donc écrire

$$q_i^2 = \left(\sum_t k_t \right)^2 \approx 2k_i \sum_{t \neq i} k_t. \quad (5.32)$$

On considère maintenant $i \rightarrow i + j$, puis $j \rightarrow j + f$. On doit alors imposer pour ce vertex la condition (voir Fig.15)

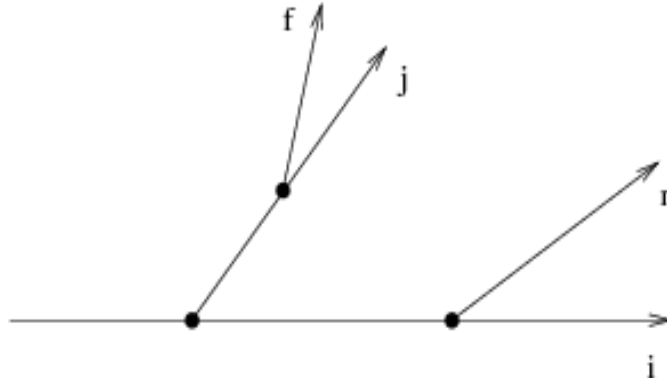


FIG. 15 – Diagramme de la Fig.14 simplifié.

$$\omega_j\Theta_{ji}^2 \gg \omega_f\Theta_{fj}^2. \quad (5.33)$$

Lorsque d'autres gluons sont émis après j , pour le $n^{\text{ème}}$ gluon, soit $i \rightarrow i + n$, nous avons

$$\omega_j\Theta_{ji}^2 \gg \omega_n\Theta_{ni}^2. \quad (5.34)$$

Nous allons démontrer que si (5.33) et (5.34) sont satisfaites, on peut négliger la dépendance en k_f (ou k_n) dans tous les propagateurs qui séparent ce vertex de celui où la paire $q\bar{q}$ a été produite par le boson γ^*/Z^0 . Ces états virtuel appartiennent soit à la ligne i , soit à un certain

parton h , tel que $h \rightarrow h + i$. Dans le premier cas, en prenant (5.32) en considération, k_f et k_n apparaissent sous la forme

$$2k_i \cdot (k_j + k_f + k_n + \dots) \approx \omega_i(\omega_j\Theta_{ji}^2 + \omega_f\Theta_{fi}^2 + \omega_n\Theta_{ni}^2 + \dots) \quad (5.35)$$

avec $j = p_1$, $n \geq 2$. Dans le deuxième cas on a

$$2k_h \cdot (k_i + k_j + k_f + k_n + \dots) \approx \omega_h(\omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j\Theta_{jh}^2 + \omega_f\Theta_{fh}^2 + \omega_n\Theta_{nh}^2 + \dots). \quad (5.36)$$

Que la dépendance en k_n puisse être négligée dans (5.35) découle de la condition (5.34), et dans le deuxième cas, de (5.34) et des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_n &\ll \omega_i, & \Theta_{nh}^2 &\lesssim \Theta_{ni}^2 + \Theta_{ih}^2, \\ \omega_i &\gg \omega_j, & \omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j\Theta_{jh}^2 &\sim \omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j(\Theta_{jh}^2 + \Theta_{ih}^2) \gtrsim \omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j\Theta_{ji}^2; \end{aligned} \quad (5.37)$$

de plus,

$$\omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j\Theta_{ji}^2 \gg \omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_n\Theta_{ni}^2 \gg \omega_n(\Theta_{ih}^2 + \Theta_{ni}^2) \gtrsim \omega_n\Theta_{nh}^2.$$

Conclusion : k_n peut être négligé par rapport à $k_i + k_j$ car $\omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j\Theta_{jh}^2 \gg \omega_n\Theta_{nh}^2$. Quant à k_f , il peut se négliger dans le premier cas si l'on tient compte de (5.33) et de la relation

$$\omega_f \ll \omega_j, \quad \Theta_{fi}^2 \lesssim \Theta_{fj}^2 + \Theta_{ji}^2; \quad (5.38)$$

en effet,

$$\omega_j\Theta_{ji}^2 \sim \omega_j\Theta_{ji}^2 + \omega_f\Theta_{fj}^2 \gg \omega_f(\Theta_{fj}^2 + \Theta_{ji}^2) \gtrsim \omega_f\Theta_{fi}^2 \Rightarrow \omega_j\Theta_{ji}^2 \gg \omega_f\Theta_{fi}^2.$$

Dans le deuxième cas, on utilise (5.33), (5.37), $\Theta_{ih} > \Theta_{jh}$ et

$$\omega_f \ll \omega_j, \quad \Theta_{fh}^2 \lesssim \Theta_{fj}^2 + \Theta_{jh}^2$$

où l'on a remplacé h par i dans (5.38). En effet, à partir de (5.37)

$$\omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j\Theta_{jh}^2 \gtrsim \omega_i\Theta_{ih}^2 + \omega_j\Theta_{ji}^2 \gg \omega_i\Theta_{jh}^2 + \omega_f\Theta_{fj}^2 \gg \omega_f(\Theta_{jh}^2 + \Theta_{fj}^2) \gtrsim \omega_f\Theta_{fh}^2.$$

Conclusion : k_n et k_f peuvent être négligés par rapport à $k_i + k_j$. La contribution logarithmique dominante est donc donnée par l'état le plus virtuel, soit l'état de plus faible temps de fluctuation.

Nous allons démontrer maintenant que si l'une des contraintes (5.33) ou (5.34) n'est pas satisfaite, rien que sur un vertex on perd alors une contribution logarithmique. Pour cela, on va considérer le vertex de la Fig.14 où l'on a $q_1 = q_2 + q_3$. D'après ce qu'on vient de démontrer

$$\begin{aligned} q_2^2 &= 2k_i \cdot k_n \simeq \omega_i\omega_n\Theta_{ni}^2, & q_3^2 &= 2k_j \cdot k_f \simeq \omega_j\omega_f\Theta_{fi}^2, \\ q_1^2 &= 2k_i \cdot (k_j + k_n + k_f) \simeq \omega_i(\omega_j\Theta_{ji}^2 + \omega_n\Theta_{ni}^2 + \omega_f\Theta_{fi}^2). \end{aligned}$$

En effet,

$$M_N \propto \frac{1}{q_1^2} \times \frac{1}{q_2^2} \times \frac{1}{q_3^2} \dots$$

où on n'a pas tenu compte des numérateurs. Si les conditions (5.33) et (5.34) sont satisfaites, alors

$$M_N \propto \frac{1}{\omega_j\Theta_{ji}^2} \times \frac{1}{\omega_n\Theta_{ni}^2} \times \frac{1}{\omega_f\Theta_{fi}^2}$$

et ainsi, on gagne une contribution doublement logarithmique molle et colinéaire dans le calcul de la section efficace pour chaque émission de ce type. Par contre, la violation de la condition (5.33) entraîne $\omega_f \Theta_{fj}^2 \gtrsim \omega_j \Theta_{ji}^2$; or, si l'on tient compte de $\omega_j \gg \omega_f$, on doit avoir $\Theta_{fj} \gg \Theta_{ji}$. Puisque $\Theta_{fi} + \Theta_{ji} \geq \Theta_{fj} \geq |\Theta_{fi} - \Theta_{ji}|$, on a

$$\Theta_{fi} \simeq \Theta_{fj} \quad \text{et} \quad q_1^2 \simeq \omega_i(\omega_j \Theta_{ji}^2 + \omega_n \Theta_{ni}^2 + \omega_f \Theta_{fj}^2) \sim \omega_i(\omega_n \Theta_{ni}^2 + \omega_f \Theta_{fj}^2)$$

indépendamment de la contrainte (5.34). Avec ceci on aurait

$$M_N \propto \frac{1}{\omega_n \Theta_{ni}^2 + \omega_f \Theta_{fj}^2} \times \frac{1}{\omega_n \Theta_{ni}^2} \times \frac{1}{\omega_f \Theta_{fj}^2}$$

et on perdrait en $\log \Theta$. Remarquons que **dans l'approximation doublement logarithmique, chacun des dénominateurs des propagateurs doit donner une contribution logarithmique angulaire lorsque l'on intègre sur les angles d'émission**; puisque q_1^2 est déterminé par les mêmes angles que q_2^2 et q_3^2 , ceci entraîne la perte d'un log. Le même argument est vrai si l'on considère que (5.34) n'est pas satisfaite.

Nous avons ainsi démontré que les contraintes (5.33) et (5.34) déterminent la région qui donne une contribution doublement logarithmique. Nous concluons que le dénominateur du propagateur de la ligne i peut s'écrire sous la forme simplifiée $2k_i k_j$.

On étudie maintenant la simplification des numérateurs. On démontre que comme dans le cas $N = 2, \forall N$, seulement les polarisations physiques ($\lambda = 1, 2$) contribuent au calcul de la section efficace. Prenons le même vertex et considérons la quantité

$$V_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = e_{\mu}^{\lambda_1}(q_1) e_{\nu}^{\lambda_2}(q_2) e_{\rho}^{\lambda_3}(q_3) \gamma^{\mu\nu\rho}(-q_1, q_2, q_3), \quad (5.39)$$

où $\gamma^{\mu\nu\rho}$ est le facteur de Lorentz associé au vertex à trois gluons. On va déterminer $V_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$ pour les différentes valeurs de λ . D'abord, on exprime les quantités dans (5.39) en fonction de $\omega_n, \omega_f, \omega_j, \omega_i$, et des angles Θ_{ji}, Θ_{ni} et Θ_{fj} . Dans le référentiel du centre de masse de la paire $q\bar{q}$, le quadri-vecteur de jauge devient $c = (1, \vec{0})$, or

$$(q_1 \cdot c) = q_1^0 \approx (q_2 \cdot c) = q_2^0 \simeq \omega_i, \quad (q_3 \cdot c) = q_3^0 \simeq \omega_j, \quad (5.40)$$

$$q_1^2 \simeq \omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2, \quad q_2^2 \simeq \omega_i \omega_n \Theta_{ni}^2, \quad q_3^2 \simeq \omega_j \omega_f \Theta_{fj}^2.$$

On estime les angles $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \vartheta_{12}$, $(\vec{q}_1, \vec{q}_3) = \vartheta_{13}$ et $(\vec{q}_2, \vec{q}_3) = \vartheta_{23}$. Géométriquement, la condition $\vec{q}_1 = \vec{q}_2 + \vec{q}_3$ se représente sous la forme donnée par le triangle de la Fig.16 et on a

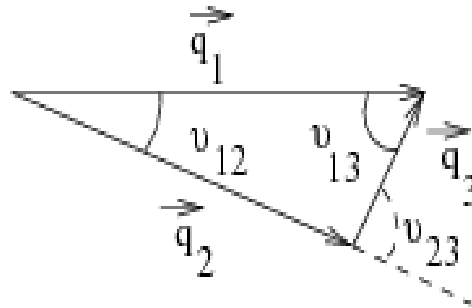


FIG. 16 – Triangle $\vec{q}_1 = \vec{q}_2 + \vec{q}_3$.

$$\frac{|\vec{q}_1|}{\sin(\pi - \vartheta_{23})} = \frac{|\vec{q}_2|}{\sin \vartheta_{13}} = \frac{|\vec{q}_3|}{\sin \vartheta_{12}}. \quad (5.41)$$

Pour $\vartheta_{12} \ll 1$ (\vec{q}_1 et \vec{q}_2 quasi-colinéaires), on a de même $\vartheta_{13} \ll 1$ et $\vartheta_{23} \ll 1$. Dans ce cas on simplifie (5.41) et on obtient

$$\frac{\vartheta_{12}}{|\vec{q}_3|} = \frac{\vartheta_{13}}{|\vec{q}_2|} = \frac{\vartheta_{23}}{|\vec{q}_1|},$$

puis selon (5.33), (5.34), et (5.40) on obtient

$$\omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2 \simeq q_1^2 = q_2^2 + q_3^2 + 2q_2 q_3 \simeq q_2^0 q_3^0 \vartheta_{23}^2 \simeq \omega_i \omega_j \vartheta_{23}^2,$$

et on a

$$\vartheta_{23} \simeq \Theta_{ji}, \quad \vartheta_{13} \simeq \Theta_{ji}, \quad \vartheta_{12} \simeq \left(\frac{\omega_j}{\omega_i} \right) \Theta_{ji} \ll \Theta_{ji}.$$

On détermine (5.39) pour les états de polarisations transverses en prenant explicitement l'expression (5.10) de $\gamma_{\mu\nu\rho}$, soit

$$\gamma_{\mu\nu\rho}(-q_1, q_2, q_3) = g_{\mu\nu}(q_1 + q_2)_\rho + g_{\rho\mu}(-q_1 - q_3)_\nu + g_{\nu\rho}(q_3 - q_2)_\mu;$$

mais $q_1 \simeq q_2 \ll q_3$, donc

$$\gamma_{\mu\nu\rho}(-q_1, q_2, q_3) \simeq g_{\mu\nu} 2q_{2\rho} - g_{\rho\mu} q_{2\nu} - g_{\nu\rho} q_{1\mu};$$

$$\begin{aligned} V_{t_1 t_2 t_3}(q_1, q_2, q_3) &\simeq (e^{(t_1)}(q_1) \cdot e^{(t_2)}(q_2)) 2(e^{(t_3)}(q_3) \cdot q_2) - (e^{(t_1)}(q_1) \cdot e^{(t_3)}(q_3))(e^{(t_2)}(q_2) \cdot q_2) \\ &\quad - (e^{(t_2)}(q_2) \cdot e^{(t_3)}(q_3))(e^{(t_1)}(q_1) \cdot q_1) = (e^{(t_1)}(q_1) \cdot e^{(t_2)}(q_2)) 2(e^{(t_3)}(q_3) \cdot q_2) \\ &\quad \sim \omega_i \Theta_{ji}, \quad t_{1,2,3} = 1, 2, \end{aligned} \tag{5.42}$$

où l'on a tenu compte de $(e^{(t_i)}(q_i) \cdot q_i) = 0$ pour $i = 1, 2$. Il est de même nécessaire de remarquer que

$$(e^{(t_3)}(q_3) \cdot q_2) \simeq (e^{(t_3)}(q_3) \cdot k_i). \tag{5.43}$$

En effet, si l'on considère que, dans la création de l'état virtuel d'impulsion q_2 , en plus du gluon i , des gluons supplémentaires d'impulsions k_s sont émis aux angles d'émission légèrement inférieurs à Θ_{ji} , on a $q_2 = k_i + \sum_s k_s$. Soit $\vartheta_s = \widehat{(\vec{q}_3, \vec{k}_s)}$. Alors, à partir de $\omega_j \omega_s \vartheta_s^2 \lesssim 2q_3 k_s \ll q_1^2 \simeq \omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2$, on conclut $[e^{(t_3)}(q_3) \cdot k_s] \sim \omega_s \vartheta_s \ll \omega_i \Theta_{ji}$, et, avec ceci, on en déduit (5.43). On considère maintenant le cas où l'un des vecteurs $e^{(\lambda)}(q)$ est non-physique (polarisations longitudinales, $\lambda \equiv \ell = 0, 3$). Par exemple, dans

$$\begin{aligned} V_{\ell_1 t_2 t_3} &\simeq (e^{(\ell_1)}(q_1) \cdot e^{(t_2)}(q_2))(2q_2 \cdot e^{(t_3)}(q_3)) - (e^{(\ell_1)}(q_1) \cdot e^{(t_3)}(q_3))(q_2 \cdot e^{(t_2)}(q_2)) \\ &\quad - (e^{(t_2)}(q_2) \cdot e^{(t_3)}(q_3))(q_1 \cdot e^{(\ell_1)}(q_1)), \end{aligned} \tag{5.44}$$

les deux premiers termes sont nuls et on a

$$V_{\ell_1 t_2 t_3} \simeq -(e^{(t_2)}(q_2) \cdot e^{(t_3)}(q_3))(q_1 \cdot e^{(\ell_1)}(q_1)), \tag{5.45}$$

or $e^{(t_2)}(q_2) \cdot e^{(t_3)}(q_3) \sim \cos(\pi - \Theta_{ji}) = -\cos(\Theta_{ji}) \approx -1 + \mathcal{O}(\Theta_{ji}^2)$, puis

$$q_1 \cdot e^{(\ell_1)}(q_1) = \frac{q_1^2 \pm \sqrt{q_1^2} \omega_i}{\left[2\omega_i(\omega_i \pm \sqrt{q_1^2}) \right]^{1/2}} \approx \frac{\omega_i \left(\omega_j \Theta_{ji}^2 \pm \sqrt{\omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2} \right)}{\left[2\omega_i^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{\omega_j}{\omega_i} \Theta_{ji}^2} \right) \right]^{1/2}},$$

mais $\omega_j \Theta_{ji}^2 \ll \sqrt{\omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2}$ et $1 \gg \sqrt{\frac{\omega_j}{\omega_i} \Theta_{ji}^2}$, donc $q_1 \cdot e^{(\ell_1)}(q_1) \sim \sqrt{\omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2}$, et finalement

$$V_{\ell_1 t_2 t_3} \sim \sqrt{\omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2}. \quad (5.46)$$

Si maintenant on compare (5.42) et (5.46) on voit que

$$V_{t_1 t_2 t_3} \sim \omega_i \Theta_{ji} \gg V_{\ell_1 t_2 t_3} \sim \sqrt{\omega_i \omega_j \Theta_{ji}^2}.$$

Ce résultat se généralise à toute autre contraction sur l'une ou plus des polarisations longitudinales. Les expressions peuvent être trouvées dans [8].

Cette comparaison démontre que la projection des amplitudes (5.9a), (5.9b), (5.9c) sur les polarisations transverses des gluons donne la contribution la plus importante. La même analyse se généralise au cas du vertex $q \rightarrow q + g$. D'ailleurs, le dénominateur du propagateur peut se mettre sous la forme $2k_j(k_0 \equiv E_{\pm})$ dans le vertex pour l'émission du gluon j . Les projections sur les polarisations transverses l'emportent sur les projections sur les polarisations longitudinales, ainsi que le démontrent les estimations suivantes (elles peuvent être obtenues facilement) :

$$(e^{(1,2)}(q_3) \cdot k_0) \sim \omega_0 \Theta_{j0}, \quad (e^{(0,3)}(q_3) \cdot k_0) \sim \omega_0 \Theta_{j0}^2 + (\omega_0/\omega_j) \sqrt{\omega_j \omega_f \Theta_{fj}^2}$$

où l'on tient compte de (5.33). Par conséquent, cette analyse démontre que, dans l'expansion (5.7), on peut ne garder que les polarisations physiques, de sorte que $d_{\rho\sigma}(k, c) \simeq g_{\rho\sigma}^{\perp}(k)$, dont l'expression est écrite dans (5.19). De (5.42) et (5.43) on en déduit que seulement $g_{\mu\nu} 2k_i^{\sigma}$ donne une contribution non nulle dans le vertex $i \rightarrow i + j$, suite à la projection sur les états de polarisations transverses. La même démarche peut être menée à bien comme dans le cas de l'émission de deux gluons, à savoir, nous allons démontrer qu'après cette simplification des vertex, $g_{\rho\sigma}^{\perp}$ peut être remplacée par $g_{\rho\sigma}$. Nous allons considérer les propagateurs de la ligne j . Leurs numérateurs interviennent dans l'élément de matrice sous la forme suivante

$$2k_i^{\rho} g_{\rho\rho_3}^{\perp}(q_3) g_{\rho_3\rho_4}^{\perp}(q_4) \cdots g_{\rho_{n-1}\rho_n}^{\perp}(q_n) e_j^{\rho_n},$$

où q_3, q_4, \dots, q_n sont les impulsions des propagateurs dans la ligne j , $g_{\mu\nu}^{\perp}(q_a) = -\delta_{\mu\nu} + q_a^{\mu} q_a^{\nu} / q_a^2$, e_j est le vecteur de polarisation du gluon j . Les indices de Lorentz prennent les valeurs des trois coordonnées spatiales 1, 2, 3. Il suffit de démontrer, par analogie avec le cas $N = 2$, que le terme en δ donne la contribution dominante. La multiplication du deuxième terme dans g^{\perp} par e_j donne la quantité $2\omega_i(q_a e_j)/\omega_j$, où q_a est l'impulsion d'un certain état virtuel de la ligne j qui se désintègre en un autre état du même type, puis d'autres gluons d'impulsion k_t sont émis, tel que $q_a = k_j + \sum_t k_t$. Puisque $e_j k_j = 0$, nous avons

$$\omega_i(q_a \cdot e_j)/\omega_j \simeq \sum_t (\omega_t \omega_i / \omega_j) \vartheta_t,$$

où $\vartheta_t = \widehat{(\vec{k}_j, \vec{k}_t)}$. Le terme donné par δ est $\sim \omega_i \Theta_{ji}$. Or

$$\omega_j \omega_t \vartheta_t^2 \simeq 2k_j \cdot k_t \lesssim q_3^2 \simeq \omega_j \omega_f \Theta_{fj}^2 \ll \omega_j^2 \Theta_{ji}^2,$$

On divise par ω_j et on obtient $(\omega_t \omega_i / \omega_j) \vartheta_t \ll \omega_i \Theta_{ji}$. La première partie de la démonstration est ainsi terminée.

Deuxième partie de la démonstration

On doit maintenant se convaincre que les conditions (5.28) et (5.30) couvrent bien l'espace des angles d'émission et que celles-ci interviennent dans le cadre de l'approximation doublement logarithmique, à savoir, que l'on doit attribuer le diagramme \mathcal{D} à l'amplitude (5.31) dans la région $\Gamma_{\mathcal{D}}$. Le diagramme \mathcal{D} , respectant les contraintes sur les angles d'émission, a été construit dans la Fig.14. Nous allons effectuer cette démonstration par induction. Pour l'émission d'un gluon ($N=1$) cet énoncé se confirme sans difficulté car il n'existe qu'un seul diagramme (on considère l'émission d'un seul gluon par $q(\bar{q})$) et la région qui lui correspond est identique à celle qui donne une contribution doublement logarithmique ($\Theta_{g,q(\bar{q})} \ll \Theta_{\pm}$). Par la suite, on assume que cet énoncé se généralise à l'émission de $N - 1$ gluons de bremsstrahlung et on démontrera qu'il est vrai dans le cas de l'émission de N gluons.

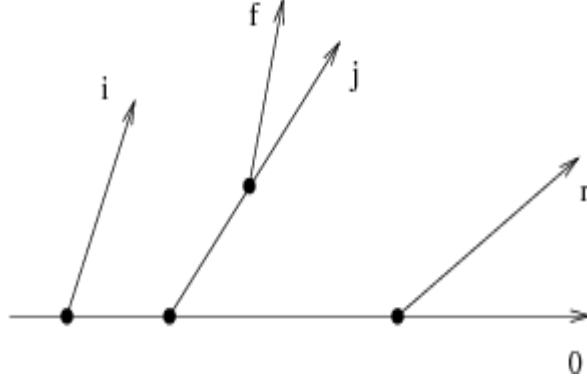


FIG. 17 – Diagramme correspondant à la production de N gluons.

On considère les différentes manières d'insérer un gluon i dans un diagramme à $N-1$ gluons. Nous allons construire ces diagrammes de sorte que les contraintes angulaires (5.33) et (5.34) soient satisfaites dans la région $\Gamma_{\mathcal{D}}$, dans l'objectif d'obtenir une contribution doublement logarithmique. La présence du terme $g_s(e_i \cdot p_+)/ (k_i \cdot p_+)$ (sans facteur de couleur) se comprend facilement : si le gluon i est émis par la particule j , alors, $g_s(e_i \cdot k_j)/ (k_i \cdot k_j)$ apparaît dans l'élément de matrice, mais, vue l'importance de l'angle Θ_{i0} qui entraîne $\Theta_{ij} \simeq \Theta_{i0} \gg \Theta_{j0}$, on a $(e_i \cdot k_j)/ (k_i \cdot k_j) \simeq (e_i \cdot k_0)/ (k_i \cdot k_0) = (e_i \cdot p_+)/ (k_i \cdot p_+)$. Par conséquent, le problème qui se pose est donné par le facteur de couleur. En effet, si ω_i est la fréquence maximale, le facteur de couleur t^{a_i} est correct car la seule possibilité d'avoir une contribution doublement logarithmique est celle qui est donnée par l'insertion du gluon i sur le quark juste avant l'émission du gluon j , soit celle qui est donnée par le diagramme de la Fig.17. La contrainte donnant cette contribution s'écrit sous la forme $\omega_i \Theta_{i0}^2 \gg \omega_j \Theta_{j0}^2$. Par contre, si on

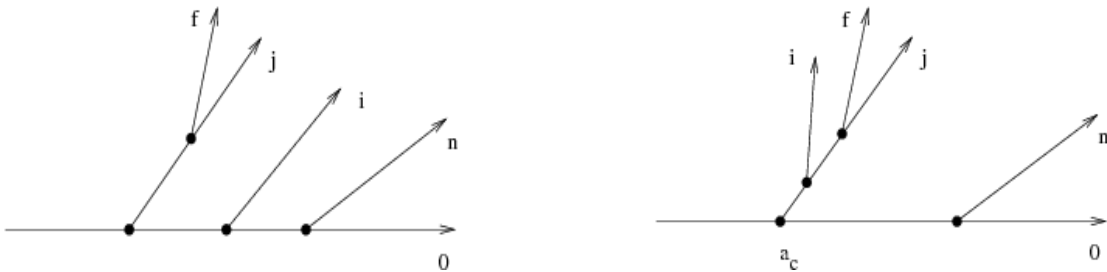


FIG. 18 – Diagrammes à prendre en considération lorsque l'on fait décroître la fréquence ω_i .

fait décroître ω_i indéfiniment de sorte que l'on arrive à la région $\omega_i \Theta_{i0}^2 \ll \omega_j \Theta_{j0}^2$, ($\omega_i \Theta_{i0}^2 \gg$

$\omega_j \Theta_{j0}^2$ ne donne aucune contribution) mais si encore $\omega_i \Theta_{i0}^2 \gg \omega_n \Theta_{n0}^2$ et $\omega_i \Theta_{i0}^2 \gg \omega_f \Theta_{f0}^2$, ce diagramme n'apporterait aucune contribution ; or, dans ce cas on aurait deux diagrammes qui en donnerait une, celui où l'on insère le gluon i entre j et n , Fig.18 (gauche) et le deuxième, où l'on insère i sur la ligne j avant l'émission de f , Fig.18 (droite). Cependant, on réalise que la somme des diagrammes de la Fig.18 donne, en utilisant la relation de commutation du groupe $SU(3)$ [1][20] $[t^{a_i}, t^{a_j}] = i f_{a_i a_j a_c} t^{a_c}$, la même contribution $g_s(e_i p_+) / (k_i p_+) t^{a_i}$, qui correspond au diagramme de la Fig.17. En fait, la somme

$$g_s((e_i p_+) / (k_i p_+) t^{a_j} t^{a_i} + (e_i k_j) / (k_i k_j) i f_{a_i a_j a_c} t^{a_c}) \simeq g_s(e_i \cdot p_+) / (k_i \cdot p_+) (t^{a_j} t^{a_i} + i f_{a_i a_j a_c} t^{a_c}) \\ = [g_s(e_i \cdot p_+) / (k_i \cdot p_+) t^{a_j}] t^{a_i}$$

dans l'approximation $\Theta_{ij} \simeq \Theta_{i0} \gg \Theta_{j0}$ mentionnée ci-dessus. Si l'on continue de faire décroître ω_i de sorte que l'on franchit la région $\omega_i \Theta_{i0}^2 \sim \omega_n \Theta_{n0}^2$ et / ou $\omega_i \Theta_{i0}^2 \sim \omega_f \Theta_{f0}^2$, il faudrait faire le raisonnement précédent : on prendrait deux diagrammes supplémentaires pour chaque cas tels que le résultat de la somme donne les diagrammes de la Fig.18. La deuxième partie de la démonstration est ainsi faite. On a donc démontré que l'amplitude (5.31) correspond ainsi à l'émission de N gluons dans la région $\Gamma_{\mathcal{D}}$.

5.5 Section efficace du processus et introduction du facteur de forme de Sudakov

Après avoir évalué le carré de la somme des amplitudes (5.31) pour tous les diagrammes \mathcal{D} , en plus d'avoir pondéré par l'espace de phase des émissions et d'avoir effectué la somme sur les polarisations transverses $\lambda = 1, 2$ des gluons émis, on obtient

$$d\sigma_N = d\sigma_0 \prod_{i=1}^N \frac{g_s^2}{(2\pi)^3} C_A \frac{d^3 k_i}{2\omega_i} \frac{\mathcal{P}_i^2 \sin^2 \Theta_{k_i}}{(k_i \cdot \mathcal{P}_i)^2}, \quad (5.47)$$

où $d\sigma_0$ est la section efficace de Born qui correspond à l'annihilation $e^+ e^- \rightarrow q\bar{q}$. On remarque que la factorisation de l'amplitude associée à l'émission de N gluons, sur laquelle on a déjà insisté depuis le premier chapitre, entraîne également la factorisation du facteur de rayonnement dans le calcul de la section efficace. C_A est le facteur de couleur qui correspond à l'émission d'un gluon par un quark $A \equiv F$, $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ et $A \equiv G$, $C_G = N_c$, à l'émission d'un gluon par un gluon¹⁰.

Puisque la section efficace est dominée par l'émission des gluons colinéaires (Θ petit), le facteur de rayonnement se simplifie comme

$$\frac{\mathcal{P}_i^2 \sin^2 \Theta_{k_i}}{(k_i \cdot \mathcal{P}_i)^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\sin^2 \Theta_{k_i}}{(1 - \cos \Theta_{k_i})^2} \approx \frac{4}{\omega^2 \Theta_{k_i}^2} \approx \frac{4}{k_{i\perp}^2}.$$

On peut de plus introduire la constante de couplage des interactions fortes $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ et récrire (5.47) de façon à ce que l'on puisse mieux apprécier le caractère Doublement Logarithmique (DL) du rayonnement

$$d\mathcal{K}(\vec{k}) \equiv \frac{d\omega}{\omega} \frac{d^2 k_{\perp}}{2\pi k_{\perp}^2} \frac{2C_A}{\pi}. \quad (5.48)$$

¹⁰ C_F et N_c sont respectivement les Casimirs de la représentation fondamentale et de la représentation adjointe du groupe $SU(N_c)$, pour $N_c = 3$, $C_F = 4/3$.

L'insertion des corrections virtuelles à une boucle dans le calcul de la section efficace consiste à multiplier l'élément de matrice (5.31) par le facteur suivant [8][6] (facteur de forme de Sudakov, sans démonstration), soit

$$\mathcal{F} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\omega_F(p_+, 1) + \omega_F(p_-, 1) + \sum_{i=1}^N \omega_G(k_i, \Theta_i) \right] \right\} \quad (5.49)$$

où Θ_i est l'angle entre le gluon (enfant) et son parent

$$\vec{k}_i \cdot \vec{\mathcal{P}}_i = |\vec{k}_i| |\vec{\mathcal{P}}_i| \cos \Theta_i.$$

Ce facteur, dépendant de la topologie du diagramme \mathcal{D} , est étroitement lié à la section efficace du rayonnement (5.48). A savoir, la fonction $\omega_{G(F)}$ décrit la probabilité totale de l'émission d'un gluon mou par un gluon (ou quark) à l'intérieur d'un cône de demi-angle d'ouverture Θ :

$$\omega_G(p, \Theta) = \int_{\Gamma(p, \Theta)} \frac{g_s^2}{(2\pi)^3} N_c \frac{d^3 k}{2\omega} \frac{\vec{p}^2 \sin^2 \Theta_k}{(k \cdot p)^2} \approx \int_{\Gamma(p, \Theta)} d\mathcal{K}(\vec{k}), \quad (5.50)$$

puis dans le cadre de l'approximation DL

$$\omega_F(p, \Theta) \approx \frac{C_F}{N_c} \omega_G(p, \Theta).$$

L'intégration sur Θ_k a comme limite supérieure Θ et celle sur k , p^0 . Finalement, en tenant compte des corrections virtuelles la section efficace du rayonnement s'écrit sous la forme

$$d\sigma = d\sigma_0 \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{F}^2 \prod_i d\mathcal{K}(\vec{k}_i). \quad (5.51)$$

On rappelle que pour chaque diagramme \mathcal{D} , les gluons émis k_1, k_2, \dots, k_N sont ordonnés par rapport à leurs angles d'émission d'après la contrainte $\Gamma_{\mathcal{D}}$ que l'on récrit ci-dessous

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}, \Theta) : \left\{ k^0 \equiv \omega < \mathcal{P}^0; \quad \Theta_{\widehat{\vec{k}\mathcal{P}}} \equiv \Theta_k < \Theta; \quad k_{\perp} \approx \omega \Theta_k > Q_0 \right\},$$

où \mathcal{P} est l'impulsion k du parent émetteur, Θ est l'angle de l'émission qui a donné \mathcal{P} .

Définition de l'angle d'ouverture du jet : Θ_i dans (5.50) est le demi-angle d'ouverture total du jet, soit l'angle à l'intérieur duquel seront émis tous les partons. Dans la production de deux quarks, ce paramètre d'évolution est le plus important et a été pris ~ 1 car une valeur un peu plus large serait au-delà de l'approximation DLA. Tous les gluons dans le jet sont émis aux angles inférieurs à Θ_i .

5.6 Méthode de la Fonctionnelle Génératrice [5]

La notion de Fonctionnelle Génératrice (FG) est depuis longtemps exploitée en physique et en mathématiques. Par exemple, si l'on développe la fonction $G(u) = \exp(u)$ en série de Taylor au voisinage du point $u = 0$, on peut dire que celle-ci génère les coefficients a_n d'après l'expression suivante :

$$a_n \equiv \left[\left(\frac{d}{du} \right)^n G(u) \right]_{\{u=0\}}.$$

Exemples :

$$G(u) = u \exp(u) \Rightarrow 0, 1, 2 \dots n \quad \text{nombres naturels,}$$

$$G(u) = u/(e^u - 1) \Rightarrow B_n \quad \text{séries de Bernoulli,}$$

$$G(u) = \exp(2xu - u^2) \Rightarrow H_n(x) \quad \text{polynomes d'Hermite, etc.}$$

Nous suivons ici cette même logique. On peut considérer que notre section efficace du rayonnement de N gluons $d\sigma_N$ est le $N^{\text{ème}}$ coefficient du développement de Taylor d'un certain objet "générateur" qui retient l'information du processus considéré en CDQ. Cet objet ne peut être une fonction mais une fonctionnelle car les séries qu'il doit générer sont des fonctions (par exemple, elles dépendent des tri-impulsions des N - gluons) et non pas des nombres. On est ainsi amené à remplacer la section efficace "exclusive" de production de N gluons de bremsstrahlung $d\sigma_N$ (5.51) par la fonctionnelle génératrice $d\sigma\{u\}$ des coefficients $d\sigma_N$ de l'expansion de Taylor de $d\sigma\{u\}$ par rapport à une fonction dite de "sondage" $u(k)$

$$d\sigma_N^{\text{excl}} = \left[\left(\prod_{i=1}^N d^3k_i \frac{\delta}{\delta u(k_i)} \right) d\sigma\{u\} \right]_{\{u=0\}}. \quad (5.52)$$

Pour obtenir $d\sigma\{u\}$ on utilise (5.51) et on multiplie les deux membres de (5.52) par la fonction de sondage $u(k)$, on intègre sur l'espace des angles Γ , on utilise

$$\left(\frac{\delta}{\delta u(k_i)} \right) u(k) \equiv \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}), \quad \prod_{i=1}^N \int_{\Gamma} d^3k_i \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}) = 1$$

et on obtient

$$d\sigma\{u\} = d\sigma_0 \sum_{N=0,1,\dots,\infty} \mathcal{F}^2 \prod \int_{\Gamma_{\mathcal{P}(k), \Theta(\mathcal{P})}} d\mathcal{K}(\vec{k}) u(k). \quad (5.53)$$

La notion de FG est très utile dans l'étude des grandeurs inclusives. Pour obtenir la section efficace inclusive partonique d'ordre N on doit faire agir l'opérateur suivant sur $d\{u\}$ et évaluer le résultat à $u = 0$

$$\begin{aligned} d\sigma_N^{\text{incl}} &= \left[\left(\prod_{i=1}^N d^3k_i \frac{\delta}{\delta u(k_i)} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\prod_{j=1}^m d^3k_j \frac{\delta}{\delta u(k_j)} \right) d\sigma\{u\} \right]_{\{u=0\}} \\ &= \left[\left(\prod_{i=1}^N d^3k_i \frac{\delta}{\delta u(k_i)} \right) \exp \left\{ \int d^3k \frac{\delta}{\delta u(k)} \right\} d\sigma\{u\} \right]_{\{u=0\}} \\ &= \left[\left(\prod_{i=1}^N d^3k_i \frac{\delta}{\delta u(k_i)} \right) d\sigma\{u\} \right]_{\{u=1\}}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

ce qui est équivalent au développement en série de Taylor de la fonctionnelle au voisinage de $u(k) = 1$.

Les formules précédentes s'appliquent aux deux cas de processus exclusifs et inclusifs. Dans le premier cas, (5.52), pour obtenir la section efficace de production exclusive de N particules, où l'on tient compte de toutes les particules qui sont produites à l'état final, on prend

les dérivées de la fonctionnelle génératrice au point $u = 0$. Dans le deuxième cas (5.54), on obtient la section efficace inclusive de production de N particules en effectuant la somme sur l'espace de phase d'un ensemble de m particules dont on ne tient pas compte dans l'état final ; ceci revient à prendre les dérivées de la fonctionnelle génératrice au voisinage de $u = 1$.

Remarque : dans le cas de l'évolution indépendante des jets initiaux (q et \bar{q}) on peut représenter (5.53) comme le produit de deux FG's

$$d\sigma^{e^+e^-} \{u\} = d\sigma_0 Z_F(p_+, 1; \{u\}) Z_F(p_-, 1; \{u\}).$$

5.6.1 Fonctionnelle Génératrice pour les jets de quarks et de gluons

On prend un seul gluon d'impulsion l qui ne rayonne pas et qui appartient à une certaine branche. L'expression de sa FG décrit un sous-jet constitué par une seule particule et s'écrit sous la forme

$$Z(l, \Theta_l; \{u\}) = u(l) e^{-\omega_G(l, \Theta_l)} = u(l) \exp \left\{ \int_{\Gamma(l, \Theta_l)} d\mathcal{K} \cdot [-1] \right\}. \quad (5.55)$$

Θ_l est l'angle d'émission du gluon d'impulsion l qui joue le rôle d'angle d'ouverture du sous-jet l . $u(l)$ est supprimé par l'exponentielle du facteur de forme qui découle de la fonction $\mathcal{F}^2 = e^{-\omega_G(l, \Theta_l)}$ car il n'émet que des gluons virtuels. Cette suppression diminue alors considérablement la probabilité pour que ce gluon rayonne. L'expression (5.55) est écrite à partir de (5.53).

Considérons maintenant que ce gluon rayonne quelques gluons "élémentaires" (des gluons qui ne rayonnent pas). Nous appelons k son impulsion, Θ son angle d'émission et $l_1, l_2 \dots l_m$ les impulsions de ces enfants respectivement, tels que $\Theta > \Theta_1 > \Theta_2 > \dots > \Theta_m$ (voir Fig.19).

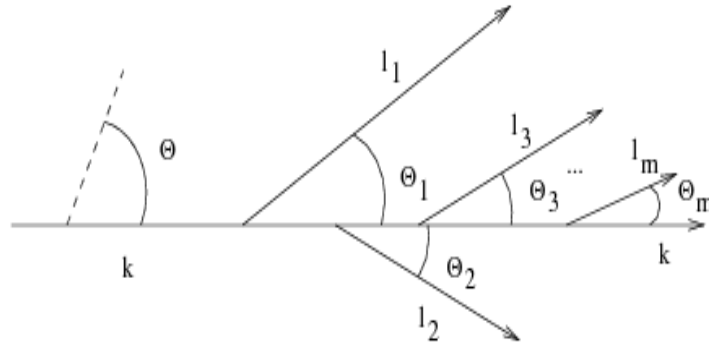


FIG. 19 – Émission d'un ensemble de gluons mous d'impulsion l_i par un parton d'impulsion k .

$$\begin{aligned} Z(k, \Theta; \{u\}) &= u(k) e^{-\omega_G(k, \Theta)} \int_{\Gamma(k, \Theta)} d\mathcal{K}(\vec{l}_1) u(l_1) e^{-\omega_G(l_1, \Theta_1)} \times \\ &\times \int_{\Gamma(k, \Theta_1)} d\mathcal{K}(\vec{l}_2) u(l_2) e^{-\omega_G(l_2, \Theta_2)} \dots \int_{\Gamma(k, \Theta_{m-1})} d\mathcal{K}(\vec{l}_m) u(l_m) e^{-\omega_G(l_m, \Theta_m)}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Si l'on prend maintenant l'expression (5.55) et qu'on la remplace dans chaque terme de l'équation précédente, en considérant que $l_1 \approx l_2 \approx \dots \approx l_m$ (les fréquences ne sont plus

strictement ordonnées, bien que la contrainte sur les angles doit être toujours satisfaite, on a $m!$ manières indiscernables de les placer) on a

$$Z(k, \Theta; \{u\}) = u(k) e^{-\omega_G(k, \Theta)} \frac{1}{m!} \left[\int_{\Theta > \Theta_i} d\mathcal{K}(\vec{l}) Z(l, \Theta_i; \{u\}) \right]^m. \quad (5.57)$$

Pour un grand nombre d'émissions, on effectue la somme sur m jusqu'à l'infini, on utilise (5.55) et on récrit (5.57) sous la forme

$$\begin{aligned} Z(k, \Theta; \{u\}) &= u(k) \exp \left\{ \int_{\Gamma(k, \Theta)} d\mathcal{K}(\vec{l}) [Z(l, \Theta_i; \{u\}) - 1] \right\} \\ &= u(k) \exp \left\{ \int_{\Gamma(k, \Theta)} \frac{dl}{l} \frac{d^2 \vec{l}_\perp}{2\pi l_\perp^2} \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} [Z(l, \Theta_i; \{u\}) - 1] \right\}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Nous devons maintenant démontrer que (5.58) se généralise, que les émissions soient élémentaires ou non, on aura ainsi obtenu l'Équation Maître satisfait par la FG dans l'approximation DL. La démonstration est simple. Il suffit en effet de considérer un gluon d'impulsion l_i qui émet à son tour d'autres gluons (Fig.20). On effectue les mêmes démarches et on obtient, en respectant la contrainte angulaire à l'intérieur du sous-jet, un terme dans (5.57) qui s'écrit sous la forme

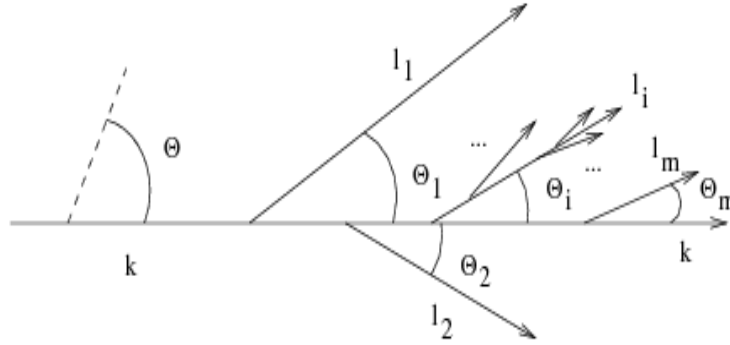


FIG. 20 – Émission d'un ensemble de gluons mous d'impulsion l_i par un parton d'impulsion k .

$$\int_{\Gamma(l_i, \Theta_i)} d\mathcal{K}(\vec{l}_i) Z(l_i, \Theta_i; \{u\}),$$

telle que :

$$Z(l_i, \Theta_i; \{u\}) = u(l_i) \exp \left\{ \int_{\Gamma(l_i, \Theta_i)} d\mathcal{K}(\vec{l}_i) [Z(l_i, \Theta_i; \{u\}) - 1] \right\}.$$

Ceci peut se généraliser $\forall i$ et, ensuite, on finit la démonstration en répétant les étapes précédentes : m devient le nombre total de sous-jets à l'intérieur du jet. On démontre ainsi que pour décrire le jet, il suffit de décrire la première émission, ce qui est une conséquence des contraintes sur les angles d'émission.

5.6.2 L'Équation Maître (EM)

On donne (voir [6] et les références ci-incluses)

$$Z_A(k, \Theta; \{u\}) = u(k)e^{-\omega_G(k, \Theta)} + \quad (5.59)$$

$$\int_{\Gamma(k, \Theta)} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{d^2 k'_\perp}{k'^2_\perp} \frac{2C_A \alpha_s}{\pi} e^{-\omega_A(k, \Theta) + \omega_A(k, \Theta')} Z_A(k, \Theta'; \{u\}) Z_G(k', \Theta'; \{u\})$$

pour l'interpréter physiquement, puis on démontrera qu'elle est équivalente à (5.58).

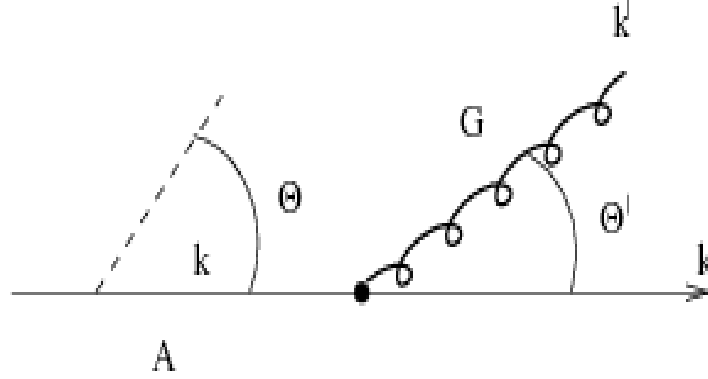


FIG. 21 – Émission d'un gluon mou d'impulsion $k' \approx \omega' \Theta'$ par un parton A d'impulsion k .

- La fonction Z_A représente la Fonctionnelle Génératrice (FG) des grandeurs inclusives pour les jets de quark ou de gluon ($A=G, Q, \bar{Q}$; $C_G = N_c = 3$ et $C_{Q, \bar{Q}} = C_F = 4/3$);
- $Z_A = Z_G^{C_F/N_c}$ dans l'approximation DL;
- le premier terme de l'équation décrit le jet sans émission d'autres gluons;
- dans l'intégrand on reconnaît la structure doublement logarithmique, $k' = (\omega', \vec{k}')$ est la quadri-impulsion de la première émission molle à partir du "parent" A (dont l'amplitude est proportionnelle au facteur de couleur correspondant C_A). Cette émission est suivie par l'évolution de deux jets G et A de quadri-impulsions k' et k (recul de A négligé) respectivement, et $\Theta' = (\vec{k}', \vec{k})$ (voir Fig.21), la contrainte angulaire impose que les angles d'émission des partons émis par la suite doivent être très inférieurs à Θ' ;
- l'intégration sur Γ impose

$$\omega' < k^0 = |\vec{k}|, \quad \Theta' < \Theta$$

où Θ est l'angle d'ouverture du jet (paramètre externe), $\Theta \sim 1$ pour être conforme à DLA. La condition $\Theta' < \Theta$ est une contrainte cinématique. Θ joue de même le rôle de paramètre d'évolution;

- l'exponentielle dans l'intégrand garantit que la première émission est celle du gluon de quadri-impulsion k' et que A n'émet que des gluons virtuels dans l'intervalle angulaire (Θ, Θ') .

Le paramètre d'évolution Θ n'intervient que dans le facteur de forme du parton A , soit

$$u(k) \exp[-\omega_G(k, \Theta)]$$

et sert de limite supérieure d'intégration dans les équations d'évolution

$$\int_{\Gamma(k, \Theta)} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{d^2 k'_\perp}{2\pi k'^2_\perp} = \int_{Q_0/k^0}^{\Theta} \frac{d\Theta'}{\Theta'} \int_{Q_0/\Theta'}^{k^0} \frac{d\omega'}{\omega'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi}.$$

Ici, dans la deuxième intégration, on fixe l'angle et on intègre sur l'énergie, dans la première l'énergie est fixée à k^0 . La forme suivante est aussi valable :

$$\int_{\Gamma(k,\Theta)} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{d^2 k'_\perp}{2\pi k'^2_\perp} = \int_{Q_0/\Theta}^{k^0} \frac{d\omega'}{\omega'} \int_{Q_0/\omega'}^\Theta \frac{d\Theta'}{\Theta'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi}.$$

Discutons d'abord ces limites d'intégration dans le dernier cas :

- $\Theta \geq \Theta'$ est une contrainte cinématique, de plus $k'_\perp \approx \omega'\Theta' \geq Q_0$, d'où $\Theta' \geq Q_0/\omega'$, finalement $Q_0/\omega' \leq \Theta' \leq \Theta$
- l'énergie de l'émission étant inférieure à celle du parton qui l'a émis, $\omega' \ll k^0$ (approximation molle), et avec $\omega'\Theta \geq Q_0$, nous avons bien $Q_0/\Theta \leq \omega' \leq k^0$; ici k^0 est une énergie. Q_0 est le "cut-off" colinéaire ou l'impulsion transverse minimale des gluon émis. On prend la dérivée de l'équation (5.59) par rapport à Θ sur le produit $Z \exp(-\omega)$:

$$\frac{\partial}{\partial \ln \Theta} [e^{-\omega_A(k,\Theta)} Z_A(k, \Theta)] = e^{-\omega_A(k,\Theta)} \int_{Q_0/\Theta}^{k^0} \frac{d\omega'}{\omega'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \frac{2C_A\alpha_s}{\pi} Z_A(k, \Theta) Z_G(k', \Theta),$$

on utilise

$$\frac{\partial}{\partial \ln \Theta} [\omega_G(k, \Theta)] = \int_{Q_0/\Theta}^{k^0} \frac{d\omega'}{\omega'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \frac{2C_A\alpha_s}{\pi} [1]$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln \Theta} Z_A(k, \Theta) &= \int_{Q_0/\Theta}^{k^0} \frac{d\omega'}{\omega'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \frac{2C_A\alpha_s}{\pi} [Z_A(k, \Theta) Z_G(k', \Theta) - Z_A(k, \Theta)] \\ &= Z_A(k, \Theta) \int_{Q_0/\Theta}^{k^0} \frac{d\omega'}{\omega'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \frac{2C_A\alpha_s}{\pi} [Z_G(k', \Theta) - 1]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

L'intégration de cette équation avec la condition initiale (pour l'émission de plus petit angle)

$$Z_A(k, \Theta; \{u\})|_{k^0\Theta=Q_0} = u(k),$$

entraîne

$$Z_A(k, \Theta; \{u\}) = u(k) \exp \left(\int_{\Gamma(k,\Theta)} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{d^2 k'_\perp}{2\pi k'^2_\perp} \frac{C_A}{N_c} \gamma_0^2(k'_\perp) [Z_G(k', \Theta'; \{u\}) - 1] \right). \quad (5.61)$$

Nous avons introduit l'expression de la constante anormale γ_0^2 en DLA (voir [6] et références incluses) :

$$\gamma_0^2(k'_\perp) = \frac{2N_c \alpha_s (k'^2_\perp)}{\pi} = \frac{2}{\beta \ln(k'^2_\perp/\Lambda^2)}; \quad (5.62)$$

elle détermine le taux de croissance des multiplicités dans les jets en fonction de l'énergie (voir 5.9). Dans (5.62)

$$\beta = \frac{1}{4N_c} \left(\frac{11}{3}N_c - \frac{4}{3}T_R \right), \quad T_R = \frac{1}{2}n_f$$

où n_f est le nombre de fermions, $n_f = 3$ est le nombre de fermions légers. La condition de normalisation

$$Z_A(k, \Theta; \{u\})|_{u=1} \equiv 1. \quad (5.63)$$

garantit que la section efficace totale est indépendante de Q_0 . On a donc démontré que (5.59) est bien équivalente à (5.58).

Avec ceci on peut obtenir les équations d'évolution pour les grandeurs inclusives, telles que le spectre des particules (voir C.1), les corrélations à deux particules dans un jet (voir C.2 et C.3). En général, on obtient ces observables en prenant n fois la dérivée fonctionnelle de la FG par rapport aux fonctions de sondage :

$$D^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \delta^n Z(\{u\}) / \delta u(k_1) \dots \delta u(k_n) \big|_{u=1},$$

et les corrélations :

$$\Gamma^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \delta^n \ln Z(\{u\}) / \delta u(k_1) \dots u(k_n) \big|_{u=1}.$$

À la place de Γ on a utilisé \mathcal{C} dans les articles C.2 et C.3 pour noter le corrélateur à deux particules, soit pour $n = 2$ on a :

$$\mathcal{C} \equiv \Gamma^{(2)} = \frac{D^{(2)}}{D_1 D_2}.$$

5.7 Spectre inclusif d'une particule p dans un jet

Pour obtenir la distribution inclusive $D^{(1)} \equiv D_A^p$ ou le spectre inclusif d'une particule p (de quadri-impulsion k_p) dans le jet A on prend la dérivée fonctionnelle de l'EM (5.61) par rapport à $u(k_p)$ au voisinage de $u = 1$ [6] :

$$D_A^p(k_p, \Theta) \equiv \frac{\delta}{\delta u(k_p)} Z_A(k, \Theta; \{u\}) \big|_{u=1}, \quad (5.64)$$

k étant la quadri-impulsion du parton initiant le jet A . Dans la suite, on considère $k^2 \approx 0$, $k_p^2 \approx 0$, ce qui permet d'écrire $E = k^0 \approx |\vec{k}|$, $E_p = k_p^0 \approx |\vec{k}_p|$. On a par définition

$$x D_A^p(x, \Theta) = E_p \frac{\delta}{\delta u(k_p)} Z_A(k, \Theta; \{u\}) \big|_{u=1}$$

où l'on appelle $x = E_p/E$, la fraction de l'énergie E du jet emportée par la particule p d'énergie E_p , définie dans le centre de masse de la particule de quadri-moment k .

On fait agir $\delta/\delta u(k_p)$ sur l'équation (5.60) en utilisant la condition de normalisation (5.63) et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \ln \Theta} D_A^p(k_p, \Theta) = \frac{C_A}{N_c} \int_{Q_0/(\Theta)_{min}}^E \frac{d\omega'}{\omega'} \gamma_0^2 D_A^p(\omega', \Theta), \quad (5.65)$$

que l'on intègre sur Θ :

$$D_A^p(k_p, \Theta) = \delta_A^p \delta \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) + \frac{C_A}{N_c} \int_{Q_0/E_p}^{\Theta} \frac{d\Theta'}{\Theta'} \int_{Q_0/(\Theta)_{min}}^E \frac{d\omega'}{\omega'} \gamma_0^2 D_A^p(\omega', \Theta'); \quad (5.66)$$

le premier terme de (5.66) représente le parton A sans d'autres émissions, et $\Theta_{min} = Q_0/E_p$. On effectue le changement de variables suivant (le même que dans C.2 en "MLLA")

$$y = \ln(E_p \Theta / Q_0), \quad \ell = \ln(E/E_p) \equiv \ln \frac{1}{x} \quad (5.67a)$$

$$y' = \ln(E_p \Theta' / Q_0), \quad \ell' = \ln(\omega'/E_p) \equiv \ln \frac{z}{x}, \quad (5.67b)$$

où $z = \omega'/E$. Avec ceci, $Q_0/(\Theta)_{\min} \leq \omega' \leq E \Leftrightarrow 0 \leq \ell' \leq \ell$ et $Q_0/E_p \leq \Theta' \leq \Theta \Leftrightarrow 0 \leq y' \leq y$. L'équation pour le spectre inclusif d'une particule dans un jet A se réécrit alors sous la forme simple :

$$D_A^p(\ell, y) = \delta_A^p \delta(\ell) + \frac{C_A}{N_c} \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' \gamma_0^2(\ell' + y') D_A^p(\ell', y') \quad (5.68)$$

où l'on a écrit (5.62) comme ($k_\perp \approx \omega' \Theta'$)

$$\gamma_0^2(\omega' \Theta') = \frac{1}{\beta \ln \left(\frac{\omega' \Theta'}{\Lambda_{QCD}} \right)} = \frac{1}{\beta \left(\ln \frac{\omega'}{E_p} + \ln \frac{E_p \Theta'}{Q_0} + \lambda \right)} \equiv \gamma_0^2(\ell' + y') = \frac{1}{\beta(\ell' + y' + \lambda)}.$$

avec $\lambda = \ln(Q_0/\Lambda_{QCD})$. (5.68) est généralisée au cadre “MLLA” par les équations (3.12) et (3.13) dans l'article C.2. Dans le cadre DLA, on fixe γ_0^2 à la valeur de la virtualité du jet $Q = 2E \sin \Theta/2 \stackrel{\Theta \ll 1}{\approx} E\Theta$ (dureté du processus), soit, pour $\omega' = E$ et $\Theta' = \Theta$, nous avons

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{\beta(\ell + y + \lambda)} = \frac{1}{\beta(Y_\Theta + \lambda)}, \quad \ell + y = Y_\Theta. \quad (5.69)$$

La relation entre le spectre inclusif d'une particule dans un jet initié par un quark (anti-quark) et celui d'une particule dans un jet initié par un gluon en DLA est la suivante :

$$D_Q^p = \frac{C_F}{N_c} D_G^p. \quad (5.70)$$

Si l'on veut obtenir le spectre des particules dans un jet A d'énergie totale E et angle d'ouverture Θ on doit fixer la somme

$$Y_\Theta \equiv \ell + y = \ln \frac{E\Theta}{Q_0}.$$

5.7.1 Solution de l'équation (5.68) pour α_s constant. Transformée de Mellin et “Hump-Backed plateau”

Dans cette approximation (DLA) on ne tient pas compte de l'évolution de la constante de couplage α_s (ou de la constante anormale γ_0). Sa valeur est par conséquent fixée à celle qui correspond à la première émission (gluon G émis par A à l'angle $\Theta' \approx \Theta$)

$$\gamma_0^2(Y_\Theta + \lambda) = 4N_c \frac{\alpha_s}{2\pi} = \frac{1}{\beta(Y_\Theta + \lambda)}, \quad \text{où} \quad \lambda = \ln \frac{Q_0}{\Lambda}.$$

On peut alors résoudre (5.68) en effectuant une transformation de Mellin

$$D_A^p(\ell, y) = \iint_C \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell} e^{\nu y} \mathcal{D}_A^p(\omega, \nu) \quad (5.71)$$

où le contour C pour chaque intégration se trouve à droite de toute singularité sur le plan complexe. Nous pouvons étendre les limites inférieures d'intégration sur ℓ et y à $-\infty$ car les intégrales correspondantes dans le plan complexe sur ω et ν sont nulles. Nous obtenons, en extrayant γ_0^2 du symbole de l'intégrale, le “propagateur” dans l'espace de Mellin :

$$\mathcal{D}_A^p(\omega, \nu) = \frac{1}{\nu - \gamma_0^2/\omega} \quad (5.72)$$

qui présente un pôle en $\omega_0 \nu_0 = \gamma_0^2$. Nous avons utilisé la représentation suivante pour $\delta(\ell)$

$$\delta(\ell) = \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega \ell} \frac{e^{\nu y}}{\nu}.$$

On effectue la première intégration sur ν , puisque $y > 0$ on ferme le contour à gauche de sorte que l'on inclut le pôle $\nu_0 = \gamma_0^2/\omega$. On prend maintenant l'intégrale sur ω :

$$D_A^p(\ell, y) = \int_{C'} \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(\omega \ell + (\gamma_0^2/\omega) y) \quad (5.73)$$

qui est, en effet, la représentation intégrale de la fonction de Bessel de première espèce. La solution de (5.68) est

$$D_A^p(\ell, y) = \delta_A^p \delta(\ell) + \frac{C_A}{N_c} \gamma_0 \sqrt{\frac{y}{\ell}} I_1 \left(2\gamma_0 \sqrt{\ell y} \right). \quad (5.74)$$

Pour en déduire le spectre inclusif des particules dans le jet en fonction de $\ell = \ln(1/x)$ par exemple, on doit fixer Y_Θ et remplacer y dans (5.74) par $y = Y_\Theta - \ell$. Dans le cas de l'annihilation e^+e^- (deux jets de quarks avec $\Theta \sim 1$), le premier terme est nul car $p = G \neq Q(\bar{Q})$, et nous avons

$$D_{Q,\bar{Q}}^G(\ln(1/x)) \equiv \left(\frac{dN}{d\ln(1/x)} \right)_{Q,\bar{Q}}^G = \frac{2C_F}{N_c} \gamma_0 \sqrt{\frac{\ln(Ex/Q_0)}{\ln(1/x)}} I_1 \left(2\gamma_0 \sqrt{\ln \frac{Ex}{Q_0} \ln \frac{1}{x}} \right). \quad (5.75)$$

qui est représenté sur la Fig.22 pour $Y_\Theta = 7.5, 15, 20, 25$. C'est ce que l'on connaît dans la littérature comme "hump-backed plateau"[9][23][13]. On pose $D_G^p \equiv D$ et on récrit :

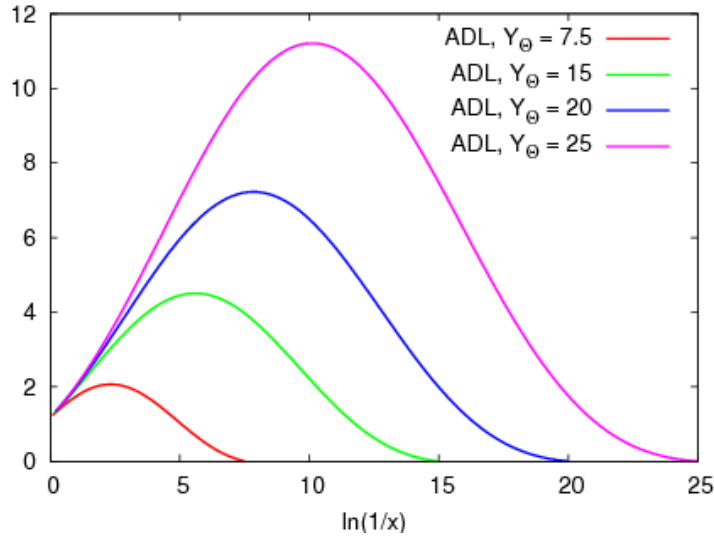


FIG. 22 – Spectre inclusif des particules dans deux jets de quark.

$$D(\ell, y) = \delta(\ell) + \gamma_0 \sqrt{\frac{y}{\ell}} I_1 \left(2\gamma_0 \sqrt{\ell y} \right). \quad (5.76)$$

Dans la limite asymptotique (E très grand), cette expression, avec $y = Y_\Theta - \ell$, peut être remplacée par (voir [19])

$$D(\ell) = \frac{dN}{d\ln(1/x)} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_0(Y_\Theta - \ell)^{1/2}}{\pi \ell^{3/2}}} \exp \left(2\gamma_0 \sqrt{\ell(Y_\Theta - \ell)} \right) \quad (5.77)$$

Le spectre (5.75) a une propriété intéressante, il présente un maximum asymptotique pour la valeur $\ell_{max} = Y/2$; c'est ce que l'on observe sur la figure Fig.22. L'origine de cette bosse est liée à la structure doublement logarithmique des émissions (molles et colinéaires). En particulier, on remarque que la distribution décroît lorsque ℓ augmente, soit lorsque x diminue. On aurait pu s'attendre à ce qu'elle augmente car l'espace de phase, étant de plus en plus large, augmenterait la probabilité pour la production de ces particules. Néanmoins, puisque les particules sont de plus en plus molles, l'angle Θ doit augmenter de sorte que la condition $k_{\perp} \approx \omega\Theta \geq Q_0$ soit toujours satisfaite ; dans cette région, les particules sont émises à plus grand angle que prévu et par conséquent, les gluons mous interfèrent destructivement. C'est le phénomène qu'on connaît comme *cohérence des gluons mous* en CDQ[9][23]. Il a lieu dans la région de l'espace de phase où l'impulsion transverse est très faible, ici, pour $y \rightarrow 0$. Ceci se voit dans la décroissance de la distribution (Fig.22 dans la limite $\ell \rightarrow Y_{\Theta}$, soit lorsque x décroît (voir aussi [6] et références incluses).

5.7.2 Dérivées logarithmiques (utiles pour l'article C.2 et C.3)

Il est très utile pour le chapitre suivant de donner la définition et l'ordre de grandeur des dérivées logarithmique du spectre. On définit

$$\psi(\ell, y) = \ln[D(\ell, y)]. \quad (5.78)$$

On prend les dérivées par rapport à ℓ et y

$$\psi_{\ell}(\ell, y) = \frac{D_{\ell}(\ell, y)}{D(\ell, y)} = \gamma_0 \sqrt{\frac{y}{\ell}}, \quad \psi_y(\ell, y) = \frac{D_y(\ell, y)}{D(\ell, y)} = \gamma_0 \sqrt{\frac{\ell}{y}}. \quad (5.79)$$

Dans les deux cas on constate que $\psi_{\ell} = \mathcal{O}(\gamma_0)$ et $\psi_y = \mathcal{O}(\gamma_0)$. Si on passe à la seconde dérivée on voit que $\psi_{\ell\ell} = \psi_{yy} = \psi_{\ell y} = \mathcal{O}(\gamma_0^3)$ sachant que $1/\ell$ ou $1/y \propto \mathcal{O}(\gamma_0^2)$.

5.8 Distribution doublement différentielle inclusive et distribution angulaire inclusive de la particule détectée

Nous présentons le seul calcul qui a été effectué dans le cas des distributions inclusives en fonction de l'impulsion transverse des partons émis (voir [6] et références incluses). Nous l'avons généralisé au cadre MLLA dans l'article C.1. La distribution inclusive doublement différentielle est obtenue en différentiant (5.74) par rapport à l'angle Θ de la particule détectée, soit par rapport à y

$$\frac{dD}{dy} \equiv \frac{d^2 N}{d\ell dy} = \frac{d^2 N}{d\ell d\ln \Theta} = \gamma_0^2 I_0 \left(2\gamma_0 \sqrt{\ell y} \right). \quad (5.80)$$

Pour en déduire la distribution angulaire, ou la distribution en fonction de $y = \ln k_{\perp}$ on intègre (5.80) dans l'intervalle $0 \leq \ell \leq Y_{\Theta_0} - y$, c'est à dire sur l'énergie des particules qui se trouvent dans le cône d'angle d'ouverture Θ (qui est inférieur à l'ouverture totale Θ_0 du jet). L'expression pour la distribution angulaire inclusive est obtenue de la façon suivante

$$\frac{dN}{d\ln k_{\perp}} \equiv \int_0^{Y_{\Theta_0}-y} d\ell \frac{d^2 N}{d\ell dy} = \gamma_0^2 \int_0^{Y_{\Theta_0}-y} d\ell I_0 \left(2\gamma_0 \sqrt{\ell y} \right). \quad (5.81)$$

Nous pouvons représenter (5.80) en fonction de y pour plusieurs valeurs de ℓ , c'est à dire qu'on fixe l'énergie de la particule détectée et on trace sa dépendance en fonction de k_{\perp}

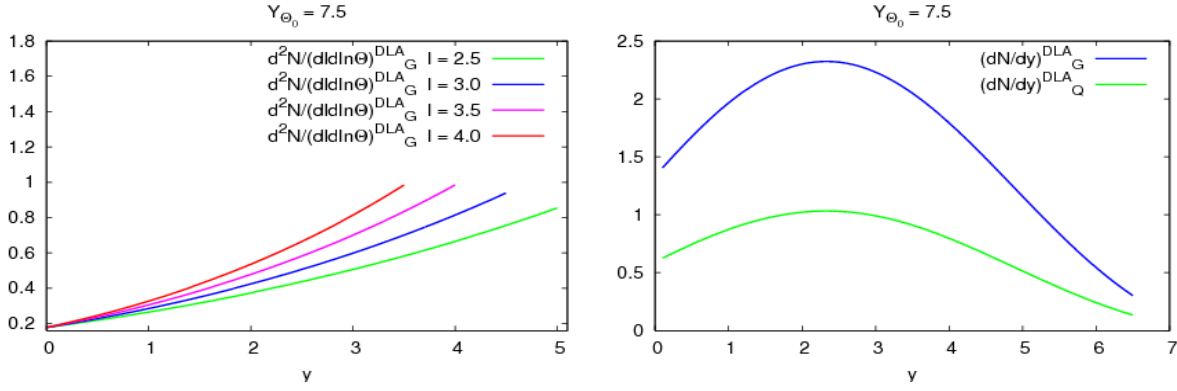


FIG. 23 – Distribution doublement inclusive (gauche) pour ℓ fixé en fonction de y et distribution angulaire inclusive (droite).

(voir Fig.23 gauche). De même, on peut représenter (5.81) numériquement pour plusieurs valeurs de Y_{Θ_0} (voir Fig.23 droite).

Dans cette approximation (DLA), on néglige l'évolution du jet entre Θ_0 et $\Theta < \Theta_0$. Il sera démontré dans l'article C.1, que l'évolution du jet entre les angles Θ et $< \Theta$ entraîne des corrections qui ne sont pas négligeables. On peut en déduire les courbes pour les distributions à l'intérieur d'un jet de quark en multipliant par le facteur C_F/N_c . Une fois de plus, on constate, dans la décroissance de la Fig.23 lorsque $y \rightarrow 0$ les effets de cohérence des gluons mous qui sont émis dans cette région.

Remarque : La forme des distributions de la Fig.23 été comparée avec celle que nous avons obtenue dans le cadre MLLA dans l'appendice E.3 de l'article C.1.

5.9 Multiplicités des jets et interprétation de la dimension anormale

Dans ce paragraphe, on applique les techniques de la FG au calcul des multiplicités dans les jets. Dans cet objectif, on remplace $u(k)$ par une constante dans (5.61) car cette observable, contrairement au cas du spectre inclusive, ne dépend ni de l'énergie E ni de l'angle d'ouverture du jet Θ séparément, mais de leur produit $Q = E\Theta$, soit de l'impulsion caractéristique du jet (ou de la virtualité totale du jet). On pose

$$Z(k, \Theta; u(k)) = Z(y; u), \quad y = \ln \frac{k\Theta}{Q_0} \equiv \ln \frac{Q}{Q_0}$$

et on écrit l'équation maîtresse qui permet d'obtenir les équations des multiplicités et des fluctuations des multiplicités (corrélateurs de multiplicités) dans les jets :

$$Z(y; u) = u \exp \left(\int_0^y dy' (y - y') \gamma_0^2(y') [Z(y'; u) - 1] \right), \quad y' \equiv \ln \frac{k_\perp}{Q_0}. \quad (5.82)$$

Les conditions initiales et de normalisation s'écrivent maintenant sous la forme :

$$Z(0; u) = u, \quad Z(y; 1) = 1. \quad (5.83)$$

Pour obtenir (5.82) nous avons effectué la chaîne de transformations suivante :

$$\int_{\Gamma(k, \Theta)} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{d^2 k'_\perp}{2\pi k'^2_\perp} = \int_{Q_0/\Theta}^{k^0} \frac{d\omega'}{\omega'} \int_{Q_0}^{\omega'\Theta} \frac{d(\omega'\Theta')}{\omega'\Theta'} = \int_{\ln Q_0}^{\ln(k^0\Theta)} d \ln(\omega'\Theta) \int_{\ln Q_0}^{\ln(\omega'\Theta)} d \ln k_\perp.$$

Il y a deux manières de traiter les fluctuations des multiplicités : soit on étudie la distribution $P_n = \sigma^n / \sigma$ des évènements sur le nombre total des particules produites, soit on mesure les corrélateurs des multiplicités inclusives $n_k = \langle n(n-1) \dots (n-k+1) \rangle$. D'après (5.52) qui définit les propriétés exclusives des distributions partoniques en termes de la FG, la probabilité de production de n particules s'écrit alors sous la forme :

$$P_n = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \left(\int d^3 k_i \frac{\delta}{\delta(u(k_i))} \right) Z(\{u\}) \Big|_{\{u=0\}}.$$

La dérivée variationnelle sur les fonctions $u(k)$, suivie de l'intégration sur l'espace de phase des quadri-impulsions des partons, est équivalente à la différentiation de la fonction $Z(u)$, $u(k) \equiv u$ que l'on a déjà évoquée :

$$P_n(y) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{du} \right)^n Z(y; u) \Big|_{\{u=0\}}; \quad Z(y; u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y) u^n.$$

Il est utile de remarquer que la distribution des multiplicités est normalisée à l'unité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{du} \right)^n Z(u) \Big|_{\{u=0\}} = e^{d/du} Z(u) \Big|_{\{u=0\}} = Z(u) \Big|_{\{u=1\}} = 1.$$

5.9.1 Corrélateurs des multiplicités

Par définition

$$n_k(y) \equiv \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) P_n(y).$$

Cette procédure équivaut au calcul du $k^{\text{ème}}$ coefficient de l'expansion de Taylor de Z au voisinage de $u = 1$

$$n_k(y) = \left[\left(\frac{d}{du} \right)^k \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n(y) \right] \Big|_{\{u=1\}} = \left(\frac{d}{du} \right)^k Z(y; u) \Big|_{\{u=1\}}. \quad (5.84)$$

Par conséquent, l'expansion des FG's au voisinage de $u = 1$ peut s'écrire en termes des corrélateurs des multiplicités comme

$$Z(y; u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u-1)^k}{k!} n_k(y), \quad (n_0 \equiv 0).$$

5.9.2 Multiplicité moyenne des partons

Elle correspond à la valeur $k = 1$ dans l'expression (5.84) : $\langle n \rangle = n_1 = \bar{n}$. On différencie (5.82) deux fois par rapport à y , puis par rapport à u , on pose $u = 1$, $Z = 1$ et on obtient l'équation pour $\bar{n}(y)$ dans le cadre DLA :

$$\bar{n}''(y) = \gamma_0^2(y) \bar{n}(y) \quad (5.85)$$

avec les conditions initiales $\bar{n}(0) = 1$, $\bar{n}'(0) = 0$. Ici,

$$\gamma_0^2(k_{\perp}) = \frac{1}{\beta \ln \frac{k_{\perp}}{\Lambda_{QCD}}} = \frac{1}{\beta \left(\ln \frac{k_{\perp}}{Q_0} + \ln \frac{Q_0}{\Lambda_{QCD}} \right)} \equiv \gamma_0^2(y) = \frac{1}{\beta(y + \lambda)}, \quad \lambda = \ln \frac{Q_0}{\Lambda_{QCD}}.$$

5.9.3 Solution de l'équation (5.85) pour $y + \lambda, \lambda \gg 1$

On résout (5.85) en effectuant une transformation de Mellin-Laplace que l'on écrit sous la forme :

$$\bar{n}(y) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} e^{\omega y} \bar{n}(\omega), \quad (5.86)$$

où C est le contour d'intégration que l'on choisit à droite de toute singularité. On substitue (5.86) dans (5.85) et on obtient l'équation différentielle satisfaite par $\bar{n}(\omega)$:

$$\frac{d\bar{n}(\omega)}{d\omega} = \left(\lambda - \frac{2}{\omega} - \frac{1}{\beta\omega^2} \right) \bar{n}(\omega), \quad (5.87)$$

que l'on intègre, puis l'on remplace dans (5.86) pour obtenir

$$\bar{n}(y) = \text{const} \times \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\exp[(y + \lambda)\omega + 1/\beta\omega]}{\omega^2}, \quad \text{const} = 1 \Big/ \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\exp[\lambda\omega + 1/\beta\omega]}{\omega^2} \quad (5.88)$$

où la constante découle de la condition $\bar{n}(0) = 1$. Or, dans la limite asymptotique $y + \lambda, \lambda \gg 1$ qui garantit, en particulier, la convergence de la série perturbative $\alpha_s/\pi \ll 1$, les représentations dans (5.88) peuvent être estimées par la méthode du col. On n'écrit pas la constante qui se simplifie dans le produit de :

$$\bar{n}(y) \propto (y + \lambda)^{1/4} \exp\left(\frac{2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{y + \lambda}\right), \quad \text{const} \propto \lambda^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\lambda}\right)$$

et on obtient

$$\bar{n}(y) \stackrel{y+\lambda, \lambda \gg 1}{\simeq} \left(\frac{y + \lambda}{\lambda}\right)^{1/4} \exp\left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} (\sqrt{y + \lambda} - \sqrt{\lambda})\right]. \quad (5.89)$$

Cette expression s'allie à celle de l'approximation WKB [6] par la représentation

$$\bar{n}(y) = \exp\left\{\int^y dy' \gamma_0(y')\right\},$$

ainsi, la quantité γ_0 s'identifie à la dimension anormale qui détermine le taux de croissance des multiplicités en fonction de l'énergie dans les jets hadroniques.

5.10 Représentation intégrale du spectre dans l'espace de Mellin ; cas $\alpha_s(k_\perp)$ variable

On considère maintenant l'effet de la variation de la constante de couplage sur le spectre. On ne peut donc pas extraire γ_0^2 de l'intégrale. Nous allons exposer les techniques nécessaires pour estimer le spectre, pour la première fois, dans le cadre de l'approximation où on introduit les corrections en logs simples (MLLA, voir C.3). On effectue le changement de variable suivant

$$F(\ell, y) = \gamma_0^2 D(\ell, y) = \frac{1}{\beta} (\ell + y + \lambda)^{-1} D(\ell, y), \quad (5.90)$$

où

$$\gamma_0^2 \equiv \gamma_0^2(\ell + y) = \frac{1}{\beta(\ell + y + \lambda)}, \quad (5.91)$$

on récrit l'équation (5.68) sous la forme :

$$\beta(\ell + y + \lambda) F(\ell, y) = \delta(\ell) + \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' F(\ell', y') \quad (5.92)$$

et on effectue une transformation de Mellin sur la fonction $F(\ell, y)$, soit

$$F(\ell, y) = \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell + \nu y} \mathcal{F}(\omega, \nu),$$

le membre de gauche de l'équation (5.92) devient, au facteur β près, après une intégration par parties

$$\iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial \nu} + \lambda \right) e^{\omega\ell + \nu y} \right] \mathcal{F}(\omega, \nu) = \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} \left(\lambda \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu} \right) e^{\omega\ell + \nu y}.$$

L'équation dans l'espace (ω, ν) devient :

$$\beta \left(\lambda \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu} \right) = \frac{1}{\nu} + \frac{\mathcal{F}}{\omega\nu}. \quad (5.93)$$

On découple cette équation en effectuant le changement de variables suivant :

$$\omega' = \frac{\omega + \nu}{2} \quad \text{et} \quad \omega'' = \frac{\omega - \nu}{2}$$

et on récrit (5.93) sous la forme

$$\beta \left(\lambda \mathcal{F} - \frac{d\mathcal{F}}{d\omega'} \right) = \frac{1}{\omega' - \nu'} + \frac{\mathcal{F}}{\omega'^2 - \nu'^2}.$$

Il s'agit d'une équation linéaire non-homogène que l'on peut résoudre facilement. La solution de l'équation homogène est la suivante :

$$\mathcal{F}(\omega, \nu) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)};$$

nous l'avons réécrite en fonction des variables précédentes. On obtient une représentation intégrale pour le spectre inclusif d'une particule avec α_s variable

$$D(\ell, y) = (\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell + \nu y} \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} e^{-\lambda s}. \quad (5.94)$$

Cette représentation a été donnée, sans démonstration, dans [9] et [23]. Elle est généralisée dans l'article C.3 au cadre MLLA.

Remarque : Dans la limite α_s -constante, on doit trouver (5.76). Ceci revient à poser $\ell = y = 0$ dans (5.91), soit ¹¹

$$\gamma_0^2(\ell + y) = \frac{1}{\beta(\ell + y + \lambda)} \stackrel{\lambda \gg \ell + y}{=} \gamma_0^2 = \frac{1}{\beta\lambda}; \quad \text{avec} \quad \lambda \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0^2 \ll 1.$$

¹¹cette limite n'est bien sûr pas physique vu que $Q \neq Q_0$.

Ceci signifie que l'on ne tient pas compte de l'évolution de la constante de couplage. Tout se passe comme si on donnait à la première émission la valeur de l'impulsion transverse minimale Q_0 . Nous engageons le lecteur à étudier le paragraphe 3.4 de l'article C.3. Pour $\lambda \gg 1$, on doit avoir $s \ll 1$ de sorte que l'on évalue l'intégrale dans le domaine de s où le résultat est non-négligeable. On effectue l'expansion dans l'intégrand (voir aussi le paragraphe 3.4 de C.3) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} &\approx \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{\omega - \nu}{\omega\nu} s \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} \\ &\approx \frac{1}{\nu} \left[1 + \frac{1}{\beta\omega\nu} s + \frac{1}{2!} \left(\frac{s}{\beta\omega\nu} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{s}{\beta\omega\nu} \right)^3 + \dots \right], \end{aligned}$$

quand on intègre sur s , on utilise $\int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\omega, \nu) &\approx \frac{1}{\nu} \left[1 + \frac{1}{\omega\nu} \frac{1}{\beta\lambda} + \left(\frac{1}{\omega\nu} \right)^2 \left(\frac{1}{\beta\lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega\nu} \right)^3 \left(\frac{1}{\beta\lambda} \right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\nu - \gamma_0^2/\omega} \end{aligned}$$

en accord avec l'expression du "propagateur" (5.72).

Remarque : La limite $\lambda = 0$ ne peut pas être prise car la représentation (5.94) diverge.

5.11 Estimation du spectre par la méthode du col [19]

Nous donnons ici l'estimation du spectre (5.94) en présentant la méthode du col de manière détaillée (car elle sera utilisée dans C.3). On utilise les techniques et notations de [9] que l'on généralisera au cadre MLLA dans l'approximation $Q_0 \neq \Lambda_{QCD}$ (voir article C.3). On définit la fonction [9]

$$\sigma(s) = \frac{1}{\beta(\omega - \nu)} \ln \frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} - \lambda s \quad (5.95)$$

dont on prend la dérivée pour obtenir la valeur s_0 qui l'annule, $\sigma'(s_0) = 0$

$$\sigma'(s_0) = \frac{1}{\beta(\nu + s_0)(\omega + s_0)} - \lambda = 0,$$

et on obtient $s_0(\omega, \nu, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4}{\beta\lambda} + (\omega - \nu)^2} - (\omega + \nu) \right)$.

Pour vérifier qu'on peut bien appliquer cette méthode, il faut déterminer le signe de $\sigma''(s_0)$; cela donne

$$\sigma''(s_0) = -\beta\lambda^2 \sqrt{\frac{4}{\beta\lambda} + (\omega - \nu)^2} < 0,$$

donc on peut effectuer l'expansion de Taylor :

$$\sigma(s) = \sigma(s_0) + \frac{1}{2} \sigma''(s_0) (s - s_0)^2 + \mathcal{O}((s - s_0)^3).$$

On obtient ainsi une intégrale gaussienne dont le résultat sera d'autant meilleur que $\lambda \gg 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} e^{-\lambda s} &\approx \frac{e^{\sigma(s_0)}}{\nu + s_0} \int_0^\infty ds e^{-\frac{1}{2} \sigma''(s_0)(s - s_0)^2} \\
&= \frac{e^{\sigma(s_0)}}{\nu + s_0} \frac{1}{\sqrt{|\sigma''(s_0)|}} \int_{-\xi_0}^\infty d\xi e^{-\xi^2} = \frac{e^{\sigma(s_0)}}{\nu + s_0} \sqrt{\frac{\pi}{2|\sigma''(s_0)|}} [1 - \text{erf}(-\xi_0)] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sigma(s_0)}}{(\nu + s_0)\sqrt{|\sigma''(s_0)|}} G(\xi_0) \stackrel{\lambda \gg 1}{\approx} 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sigma(s_0)}}{(\nu + s_0)\sqrt{|\sigma''(s_0)|}}. \tag{5.96}
\end{aligned}$$

En effet, $\xi_0(\omega, \nu, \lambda) = s_0 \sqrt{|\sigma''(s_0)|}$ et $G(\xi_0) = [1 - \text{erf}(-\xi_0)]$, avec $\xi_0 \simeq \lambda^{1/4} \Rightarrow G \rightarrow 2$ ¹². Nous avons alors pour $D(\ell, y)$ l'estimation suivante

$$D(\ell, y) \approx 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} \frac{e^{\phi(\omega, \nu, \ell, y)}}{(\nu + s_0)\sqrt{|\sigma''(s_0)|}}, \tag{5.97}$$

où

$$\phi(\omega, \nu, \ell, y) = \omega\ell + \nu y + \frac{1}{\beta(\omega - \nu)} \ln \frac{\omega(\nu + s_0)}{(\omega + s_0)\nu} - \lambda s_0(\omega, \nu, \lambda). \tag{5.98}$$

On utilise la méthode du col une deuxième fois, maintenant sur la double intégration pour ainsi déterminer le point de col (ω_0, ν_0) qui satisfait

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0,$$

et on obtient les équations

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \ell - \frac{1}{\beta(\omega - \nu)^2} \ln \frac{\omega(\nu + s_0)}{(\omega + s_0)\nu} + \frac{1}{\beta\omega(\omega - \nu)} - \lambda \frac{(\nu + s_0)}{(\omega - \nu)} = 0, \tag{5.99a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = y + \frac{1}{\beta(\omega - \nu)^2} \ln \frac{\omega(\nu + s_0)}{(\omega + s_0)\nu} - \frac{1}{\beta\nu(\omega - \nu)} + \lambda \frac{(\omega + s_0)}{(\omega - \nu)} = 0. \tag{5.99b}$$

On additionne et on soustrait (5.99a) et (5.99b) terme à terme et on obtient respectivement les relations

$$\omega_0 \nu_0 = \frac{1}{\beta(\ell + y + \lambda)}, \tag{5.100a}$$

$$\begin{aligned}
y - \ell &= \frac{1}{\beta(\omega_0 - \nu_0)} (1/\omega_0 + 1/\nu_0) - \frac{2}{\beta(\omega_0 - \nu_0)^2} \ln \frac{\omega_0(\nu_0 + s_0)}{(\omega_0 + s_0)\nu_0} \\
&\quad - \lambda \frac{\omega_0 + \nu_0 + 2s_0}{\omega_0 - \nu_0}, \tag{5.100b}
\end{aligned}$$

satisfaites par (ω_0, ν_0) avec :

$$(\omega_0 + s_0)(\nu_0 + s_0) = \frac{1}{\beta\lambda}. \tag{5.101}$$

Si on utilise (5.99a) et (5.99b) pour remplacer ℓ et y dans (5.98), on obtient

$$\phi(\omega_0, \nu_0, \ell, y) = \frac{2}{\beta(\omega_0 - \nu_0)} \ln \frac{\omega_0(\nu_0 + s_0)}{(\omega_0 + s_0)\nu_0}. \tag{5.102}$$

¹²la fonction $\text{erf}(x)$ tombe très vite vers -1 , (1) lorsque $x < 0$, ($x > 0$).

On introduit les variables auxiliaires μ, v pour paramétrer le point de col :

$$\omega_0(\nu_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta(\ell+y+\lambda)}} e^{\pm\mu(\ell,y)}, \quad (\omega_0 + s_0)(\nu_0 + s_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta\lambda}} e^{\pm v(\ell,y)}. \quad (5.103)$$

Avec celles-ci on a pour (5.100b)

$$\frac{y - \ell}{y + \ell} = \frac{(\sinh 2\mu - 2\mu) - (\sinh 2v - 2v)}{2(\sinh^2 \mu - \sinh^2 v)} \quad (5.104a)$$

et puisque $\omega_0 - \nu_0 = (\omega_0 - s_0) - (\nu_0 - s_0)$

$$\frac{\sinh v}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sinh \mu}{\sqrt{\ell + y + \lambda}}. \quad (5.104b)$$

Finalement (5.98) devient

$$\phi(\mu, v) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\ell + y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v}.$$

On peut maintenant effectuer le développement limité suivant pour estimer l'intégrale au voisinage du point de col :

$$\begin{aligned} \phi(\omega, \nu, \ell, y) &= \phi(\omega_0, \nu_0, \ell, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2}(\omega_0, \nu_0)(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2}(\omega_0, \nu_0)(\nu - \nu_0)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu}(\omega_0, \nu_0)(\omega - \omega_0)(\nu - \nu_0) + \mathcal{O}[(\omega - \omega_0)^2, (\omega - \omega_0)(\nu - \nu_0), (\nu - \nu_0)^2]. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Nous aurons besoin d'introduire le déterminant pour estimer cette double intégration par la méthode du col :

$$Det A \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu} \right)^2.$$

Les expressions des dérivées partielles et celle du déterminant sont données dans l'appendice B.1. Avec celles-ci, l'expression pour le déterminant ¹³ s'écrit en fonction de (5.103) sous la forme :

$$Det A(\mu, \nu) = \beta(\ell+y+\lambda)^3 \left[\frac{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}{\sinh^3 \mu \cosh v} \right]. \quad (5.106)$$

On choisit le contour de sorte que l'on obtienne le résultat en intégrant le long de l'axe imaginaire ; on obtient une double intégration gaussienne dont on écrit la réponse dans la limite $\ell + y + \lambda \gg 1$ (voir B.1) :

$$\ln[D(\ell, y)] \approx \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\ell + y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} + v + \ln[\mathcal{N}(\mu, v, \lambda)], \quad (5.107)$$

où

$$\mathcal{N}(\mu, v, \lambda) = \frac{1}{2}(\ell + y + \lambda) \frac{\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{1/4}}{\sqrt{\pi \cosh v Det A(\mu, v)}}.$$

¹³Cette expression n'avait jamais été calculée auparavant ; en particulier, son expression sera utile pour l'article C.3. Elle permet d'obtenir les corrections en "single logs" qui sont liées à la variation de la constante de couplage α_s .

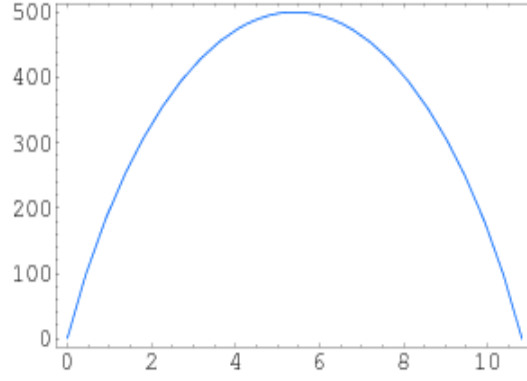


FIG. 24 – Déterminant $DetA(\mu(\ell, Y), \nu(\ell, Y))$ en fonction de $\ell = \ln(1/x)$ pour $Y = 10 \gg \lambda = 2.0$.

Nous obtenons dans cette approximation une estimation du spectre $D(\ell, Y)$ en DLA qui inclut la normalisation (avec l'expression du déterminant ici obtenu) ; on fixe la somme $\ell + y = Y$:

$$D(\ell, Y) \approx \mathcal{N}(\mu, v, \lambda) \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} + v \right]. \quad (5.108)$$

Or, dans cette approximation, puisqu'on ne s'intéresse qu'à la forme de la distribution, on néglige les contributions qui apportent des effets sous-dominants. Dans ce cas, on écrit simplement le résultat de [9] qui néglige \mathcal{N} et ne donne que l'allure de la distribution :

$$D(\ell, Y) \simeq \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} \right]$$

qui a permis de prédire l'existence du “hump-backed plateau”. Nous remarquons que le facteur pre-exponentiel \mathcal{N} de la distribution (5.108) est instable dans la limite infrarouge $\lambda \rightarrow 0$; cependant, la forme de la distribution donnée par la fonction dans l'exponentielle est, elle, stable. Or, on sait que pour garantir la convergence de la série perturbative, il faut $\alpha_s/\pi \ll 1 \Leftrightarrow \lambda \gg 1$, ce qui est en accord avec la condition d'application de la méthode du col ayant permis d'estimer l'intégration sur s (5.96) dans (5.94). Nous pouvons utiliser l'expression de la multiplicité moyenne (5.89) dans la même limite et renormaliser (5.108) par

$$\bar{n}(Y) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{Y + \lambda}{\lambda} \right)^{1/4} \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \right]$$

pour obtenir

$$\frac{D(\ell, Y)}{\bar{n}(Y)} \approx \sqrt{\frac{\beta^{1/2}(Y + \lambda)^{3/2}}{\pi \cosh v DetA(\mu, v)}} \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \left(\frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} - 1 \right) + v \right]. \quad (5.109)$$

Par contre, (5.109) est bien stable pour $\lambda \rightarrow 0$; nous en donnons l'allure dans la Fig.25 pour $Y = 10$ et $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$. Nous rencontrons la même forme (“hump-backed plateau”) que dans la Fig.22. A partir de l'expression dans l'exponentielle de (5.109), on peut vérifier que la position du maximum correspond à $\ell_{max} = Y/2$. En effet, en regardant le membre de gauche de (5.104a), on en déduit que μ et v doivent être petits au voisinage de

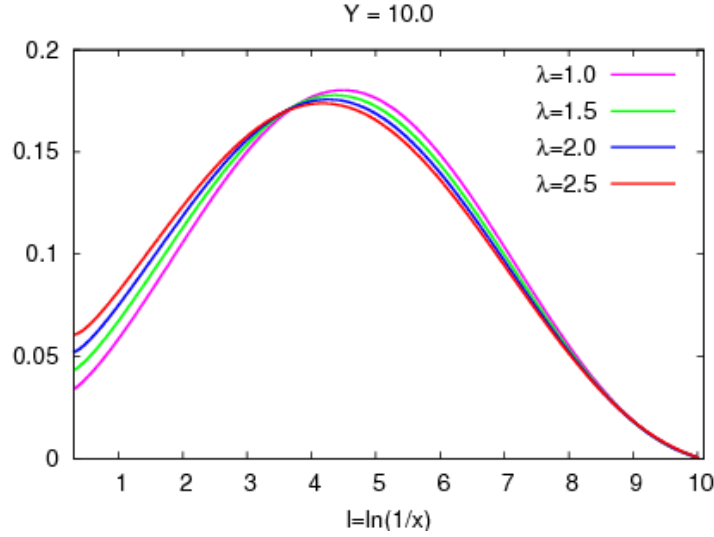


FIG. 25 – Spectre normalisé $D(\ell, Y)/\bar{n}(Y)$ en fonction de $\ell = \ln(1/x)$ pour $Y \approx 10$ et $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$.

ce point ; dans ce cas, (5.104a) et (5.104b) deviennent (utile pour la suite)

$$Y - 2\ell \stackrel{\mu, v \sim 0}{\simeq} \frac{2}{3} \frac{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}}{(Y + \lambda)^{1/2}} \mu, \quad (5.110)$$

où on a déjà remplacé μ par

$$v \stackrel{\mu, v \sim 0}{\simeq} \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{1/2} \mu. \quad (5.111)$$

Le développement limité au voisinage de ce point de la fonction dans l'exponentielle ¹⁴ de (5.109) que l'on appelle $f(\mu, v)$ s'écrit sous la forme

$$f(\mu, v) \simeq -\frac{2}{\sqrt{\beta}} \frac{3}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \frac{(Y/2 - \ell)^2}{2} + \mathcal{O}\left((Y/2 - \ell)^2\right),$$

où nous avons utilisé

$$\frac{\partial \mu}{\partial \ell} \simeq -3 \frac{(Y + \lambda)^{1/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}}. \quad (5.112)$$

On s'intéresse maintenant à l'expression du déterminant dans cette limite. On l'écrit d'abord sous la forme suivante que l'on évalue au voisinage de $\ell_{max} \approx Y/2$:

$$\begin{aligned} Det A \stackrel{\mu, v \sim 0}{=} & \beta(Y + \lambda)^3 \frac{(\mu - v) \left(1 + \frac{1}{2}\mu^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\mu^2\right) \left(v + \frac{1}{6}v^3\right) - \left(\mu + \frac{1}{6}\mu^3\right) \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right)}{\mu^3 \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right)} \\ = & \frac{1}{3} \beta(Y + \lambda)^3 \left(1 - \frac{v^3}{\mu^3}\right) = \frac{1}{3} \beta(Y + \lambda)^3 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda}\right)^{3/2}\right]. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Finalement,

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\beta^{1/2} (Y + \lambda)^{3/2}}{\pi Det A(\mu, v)}} = \left(\frac{3}{\pi \sqrt{\beta} [(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]} \right)^{1/2},$$

¹⁴On ne dérive pas sur le dernier terme (v) dans l'exponentielle de (5.109) car ceci donnerait des corrections au-delà du cadre DLA.

qui permet de donner la forme de la distribution au voisinage de ce point [9][23]

$$\frac{D(\ell, Y)}{\bar{n}(Y)} \approx \left(\frac{3}{\pi \sqrt{\beta} [(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{2}{\sqrt{\beta}} \frac{3}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \frac{(Y/2 - \ell)^2}{2} \right).$$

La forme correspond à une distribution gaussienne. Pour $\ell \gg Y/2$ nous trouvons à nouveau la décroissance rapide de la distribution qui est associée aux phénomènes de cohérence en CDQ ; elle constitue l'une des prédictions les plus importantes de CDQ perturbative.

5.11.1 Deux limites utiles

Deux limites sont intéressantes pour les formules (5.104a) et (5.104b) :

– $\ell + y \gg \lambda$ (bien que $\lambda \gg 1$) entraîne $v \ll \mu$ et par conséquent

$$\frac{y - \ell}{y + \ell} \approx \frac{\sinh 2\mu - 2\mu}{2 \sinh^2 \mu},$$

au voisinage du maximum $\ell \approx Y/2$ nous avons

$$\frac{Y - 2\ell}{Y} \approx \frac{2}{3} \mu; \quad (5.114)$$

dans cette limite le spectre devient :

$$\ln[D(\ell, y)] \propto 2 \sqrt{\frac{\ell + y}{\beta}} \frac{\mu}{\sinh \mu}.$$

– $\lambda \gg \ell + y$ (α_s -constant) donne $\mu \approx v$ (voir paragraphe 3.4 de C.3)

$$\frac{y - \ell}{y + \ell} \approx \tanh \mu \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{1}{2} \ln \frac{y}{\ell} \quad (5.115)$$

et

$$D(\ell, y) \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_0 y^{1/2}}{\pi \ell^{3/2}}} \exp \left(2\gamma_0 \sqrt{\ell y} \right)$$

qui est (5.77).

5.11.2 Remarque concernant les articles C.2 et C.3

Il est intéressant de remarquer que bien que le spectre normalisé (5.108) par \mathcal{N} soit divergent dans la limite $\lambda \rightarrow 0$, ce n'est pas le cas des dérivés logarithmiques où l'on fait disparaître la dépendance en λ du terme $\ln \mathcal{N}(v, \lambda)$.

6 Corrélations en énergie entre deux gluons mous produits dans un jet initié par un gluon ou un quark dans le cadre DLA

On prend deux fois la dérivée fonctionnelle de l'équation maîtresse (5.59) par rapport aux fonctions de sondage $u(k_1)$ et $u(k_2)$ pour obtenir l'équation satisfaite par la distribution inclusive doublement différentielle de deux particules dans un jet initié par le parton A [9] :

$$\omega_1 \omega_2 \frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{d\omega_1 d\omega_2} \equiv D_A^{(2)}(E, \Theta; \omega_1, \omega_2); \quad (6.1)$$

de plus

$$D_A^{(2)}(k_1, k_2, \Theta) = \frac{\delta^2}{\delta u(k_1) \delta u(k_2)} Z(k_1, k_2, \Theta; u(k_1), u(k_2)) \Big|_{u=1}.$$

Il convient aussi de définir cette grandeur sous la forme suivante :

$$x_1 x_2 D_A^{(2)}(x_1, x_2, \ln E \Theta) = \omega_1 \omega_2 \frac{\delta^2}{\delta u(k_1) \delta u(k_2)} Z(k_1, k_2, \Theta; u(k_1), u(k_2)) \Big|_{u=1}$$

où $x_{1,2} = \omega_{1,2}/E$ sont les fractions d'énergie emportées par les deux particules dont on étudie la corrélation dans le jet. Nous écrivons le résultat de cette différentiation en utilisant la condition (5.63) ; de plus on prend $\omega_1 > \omega_2$ de sorte que l'on puisse fixer la limite inférieure d'intégration sur la fraction d'énergie z à ω_1/E . Pour $z = 1$, il n'y a pas d'émission. Puis on rappelle que $Y_\Theta = \ln \frac{E\Theta}{Q_0}$. Ceci permet d'écrire le système d'équation suivant pour les jets de quark ($A \equiv Q$) et de gluon ($A \equiv G$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln \Theta} x_1 x_2 D_A^{(2)}(x_1, x_2, Y_\Theta) &= \frac{C_A}{N_c} \int_{\omega_1/E}^1 \frac{dz}{z} \gamma_0^2 \left[\frac{x_1}{z} \frac{x_2}{z} D_G^{(2)}\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, Y_\Theta + \ln z\right) \right. \\ &\quad \left. + x_1 D_A(x_1, Y_\Theta) \frac{x_2}{z} D_G\left(\frac{x_2}{z}, Y_\Theta + \ln z\right) + \frac{x_1}{z} D_G\left(\frac{x_1}{z}, Y_\Theta + \ln z\right) x_2 D_A(x_2, Y_\Theta) \right] \\ &= \frac{C_A}{N_c} \int_{\omega_1/E}^1 \frac{dz}{z} \gamma_0^2 \frac{x_1}{z} \frac{x_2}{z} D_G^{(2)}\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, Y_\Theta + \ln z\right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$+ x_1 D_A(x_1, Y_\Theta) \left[\frac{\partial}{\partial \ln \Theta} x_2 D_A(x_2, Y_\Theta) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \ln \Theta} x_1 D_A(x_1, Y_\Theta) \right] x_2 D_A(x_2, Y_\Theta);$$

nous avons utilisé l'équation intégrro-différentielle pour le spectre inclusive d'une particule (5.65)

$$\frac{\partial}{\partial \ln \Theta} x D_A(x, Y_\Theta) = \frac{C_A}{N_c} \int_{\omega_1/E}^1 \frac{dz}{z} \gamma_0^2 \frac{x}{z} D_G\left(\frac{x}{z}, Y_\Theta + \ln z\right);$$

nous allons récrire la dernière ligne de (6.2) sous la forme compacte

$$\frac{\partial}{\partial \ln \Theta} [x_1 D_A(x_1, Y_\Theta) x_2 D_A(x_2, Y_\Theta)]$$

et la soustraire dans les deux membres de la même équation pour la mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln \Theta} \left[x_1 x_2 D_A^{(2)}(x_1, x_2, Y_\Theta) - x_1 D_A(x_1, Y_\Theta) x_2 D_A(x_2, Y_\Theta) \right] \\ = \frac{C_A}{N_c} \int_{\omega_1/E}^1 \frac{dz}{z} \gamma_0^2 \frac{x_1}{z} \frac{x_2}{z} D_G^{(2)}\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, Y_\Theta + \ln z\right). \end{aligned}$$

Nous intégrons cette équation sur Θ . La contrainte angulaire rigoureuse sur les angles des émissions successives en DLA impose $\Theta \geq \Theta_1 \gg \Theta_2$. Or, le plus petit angle est celui de l'émission ω_2 . Toutefois, son impulsion transverse ne peut pas être inférieure au cut-off

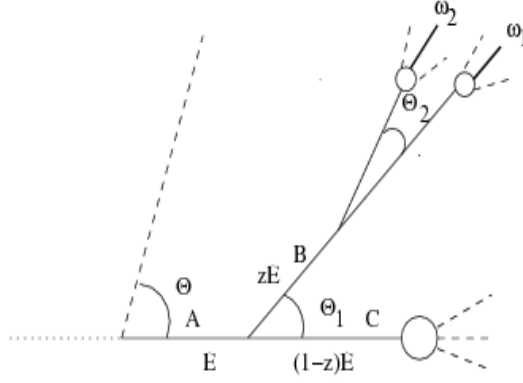


FIG. 26 – Corrélations entre deux particules d'énergies ω_1 et ω_2 .

colinéaire $k_{2,\perp} \approx \omega_2 \Theta_2 \geq \omega_2 (\Theta_2)_{\min} = Q_0$, par conséquent, l'angle d'intégration Θ_1 a les bornes suivantes, voir Fig.26

$$\Theta \geq \Theta_1 \gg (\Theta_2)_{\min} \approx Q_0/\omega_2; \quad \Theta_1 \gg \Theta_2,$$

$$x_1 x_2 D_A^{(2)}(x_1, x_2, Y_\Theta) - x_1 D_A(x_1, Y_\Theta) x_2 D_A(x_2, Y_\Theta) = \quad (6.3)$$

$$\frac{C_A}{N_c} \int_{\omega_1/E}^1 \frac{dz}{z} \int_{Q_0/\omega_2}^{\Theta} \frac{d\Theta_1}{\Theta_1} \gamma_0^2 \frac{x_1}{z} \frac{x_2}{z} D_G^{(2)}\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, Y_{\Theta'} + \ln z\right),$$

on introduit par définition la fonction de corrélation

$$x_1 x_2 \tilde{D}_A^{(2)}(x_1, x_2, Y_\Theta) = x_1 x_2 D_A^{(2)}(x_1, x_2, Y_\Theta) - x_1 D_A(x_1, Y_\Theta) x_2 D_A(x_2, Y_\Theta),$$

dont on cherche l'équation que l'on met sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \tilde{D}_A^{(2)}(x_1, x_2, Y_\Theta) = & \frac{C_A}{N_c} \int_{\omega_1/E}^1 \frac{dz}{z} \int_{Q_0/\omega_2}^{\Theta} \frac{d\Theta_1}{\Theta_1} \gamma_0^2 \left[\frac{x_1}{z} \frac{x_2}{z} \tilde{D}_G^{(2)}\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, Y_{\Theta'} + \ln z\right) \right. \\ & \left. + \frac{x_1}{z} D_G\left(\frac{x_1}{z}, Y_{\Theta'} + \ln z\right) \frac{x_2}{z} D_G\left(\frac{x_2}{z}, Y_{\Theta'} + \ln z\right) \right], \end{aligned}$$

on effectue le changement de variables

$$\ell = \ln \frac{z}{x_1}, \quad \omega_1/E \leq z \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \ell \leq \ell_1, \quad \ell_1 = \ln \frac{1}{x_1}$$

et

$$y = \ln \frac{\omega_2 \Theta_1}{Q_0}, \quad (\Theta_2)_{\min} \leq \Theta_1 \leq \Theta \Leftrightarrow 0 \leq y \leq y_2, \quad y_2 = \ln \frac{\omega_2 \Theta}{Q_0},$$

on définit $\eta = \ln \frac{\omega_1}{\omega_2} = \ln \frac{x_1}{x_2} > 0$ de sorte que $\ell_2 = \ell_1 + \eta$ et $y_1 = y_2 + \eta$. Nous avons

$$\int_{\omega_1/E}^1 \frac{dz}{z} = \int_0^{\ell_1} d\ell, \quad \int_{Q_0/\omega_2}^{\Theta} \frac{d\Theta_1}{\Theta_1} = \int_0^{y_2} dy.$$

Nous allons également utiliser le changement de variables suivant

$$xD(x) \equiv D(\ell = \ln(1/x)).$$

On arrive finalement à l'équation suivante pour les corrélations

$$\tilde{D}_A^{(2)}(\ell_1, y_2; \eta) = \frac{C_A}{N_c} \int_0^{\ell_1} d\ell \int_0^{y_2} dy \gamma_0^2(\ell + y) \left[\tilde{D}_G^{(2)}(\ell, y; \eta) + D_G(\ell + \eta, y) D_G(\ell, y + \eta) \right] \quad (6.4)$$

où nous avons utilisé [9]

$$\gamma_0^2(zE\Theta_1) = \frac{1}{\beta \left(\ln \frac{z}{x_1} + \ln \frac{x_2 E \Theta_1}{Q_0} + \ln \frac{x_1}{x_2} + \lambda \right)} \equiv \gamma_0^2(\ell + y) = \frac{1}{\beta(\ell + y + \eta + \lambda)}. \quad (6.5)$$

Dans le cas $z = 1$ et $\Theta_1 = \Theta$ nous avons

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{\beta(\ell_1 + y_2 + \eta + \lambda)} = \frac{1}{\beta(Y + \lambda)}, \quad \ell_1 + y_2 + \eta = Y.$$

Le système d'équations couplées (6.4) est généralisé au cadre MLLA dans l'article C.2 (voir les équations (3.35) et (3.36)), du à la nécessité d'inclure les corrections qui garantissent la conservation de l'énergie dans les processus de branchement ; elles ont été également écrites sous forme différentielle dans [12].

6.1 Solution de l'équation (6.4)

On introduit les techniques que nous avons utilisées dans C.2 pour résoudre (6.4). Dans cet objectif, on utilise une méthode itérative de solution, soit

$$D_A^{(2)}(\ell_1, y_2; \eta) = C_A(\ell_1, y_2; \eta) D_{A1}(\ell_1, y_1) D_{A2}(\ell_2, y_2).$$

On différencie (6.4) par rapport à ℓ_1 et y_2 , on obtient l'équation différentielle en DLA

$$\tilde{D}_{A\ell, y}^{(2)} = \frac{C_A}{N_c} \gamma_0^2 \left(\tilde{D}_G^{(2)} + D_{G1} D_{G2} \right).$$

Ici, on se place dans l'approximation où l'on considère α_s constante dans l'objectif de retrouver le résultat de [9] ; un traitement complet du problème qui tiendra compte des corrections en logs simples sera fait dans C.2. Nous allons par conséquent négliger les dérivées de la fonction C_A

$$(C_A - 1) (D_{A1, \ell y} D_{A2} + D_{A1, \ell} D_{A2, y} + D_{A1, y} D_{A2, \ell} + D_{A1} D_{A2, \ell y}) = \frac{C_A}{N_c} \gamma_0^2 (C_G D_{G1} D_{G2}),$$

or

$$D_{Ak, \ell y} = \frac{C_A}{N_c} \gamma_0^2 D_{Gk}, \quad D_{Ak} = \frac{C_A}{N_c} D_{Gk}, \quad k = 1, 2; \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_A}{N_c} \right)^2 (C_A - 1) (2\gamma_0^2 D_{G1} D_{G2} + D_{G1, \ell} D_{G2, y} + D_{G1, y} D_{G2, \ell}) &= \frac{C_A}{N_c} \gamma_0^2 (C_G D_{G1} D_{G2}) \\ &= \frac{C_A}{N_c} \gamma_0^2 [(C_G - 1) D_{G1} D_{G2} + D_{G1} D_{G2}], \end{aligned}$$

on utilise

$$\mathcal{C}_G - 1 = \frac{C_A}{N_c}(\mathcal{C}_A - 1),$$

on divise par $\left(\frac{C_A}{N_c}\right)^2 \gamma_0^2 D_1 D_2$ et on obtient la solution suivante en DLA qui est écrite en termes des dérivées logarithmiques du spectre $\psi = \ln[D(\ell, y)]$ (voir paragraphe 5.7.2) :

$$\mathcal{C}_A - 1 = \frac{N_c}{C_A} \frac{1}{1 + \frac{\psi_{G1,\ell} \psi_{G2,y} + \psi_{G1,y} \psi_{G2,\ell}}{\gamma_0^2}}, \quad (6.6)$$

Dans le cas du processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ nous avons (voir [12])

$$R \equiv \mathcal{C}_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_F.$$

Pour α_s constante on utilise les dérivées logarithmiques du paragraphe 5.7.2 et on écrit

$$\mathcal{C}_A - 1 = \frac{N_c}{C_A} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{y_1}{\ell_1}} \sqrt{\frac{\ell_2}{y_2}} + \sqrt{\frac{\ell_1}{y_1}} \sqrt{\frac{y_2}{\ell_2}}},$$

puis on remplace les quotients par μ selon (5.115) (voir paragraphe 5.11.1) et on écrit

$$\sqrt{\frac{y_1}{\ell_1}} \sqrt{\frac{\ell_2}{y_2}} + \sqrt{\frac{\ell_1}{y_1}} \sqrt{\frac{y_2}{\ell_2}} = e^{(\mu_1 - \mu_2)} + e^{-(\mu_1 - \mu_2)} = 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2),$$

puis

$$1 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2) = 3 + 4 \sinh^2\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2}\right)$$

et finalement, comme dans [9], on écrit la solution DLA des corrélations à deux particules dans un jet

$$\mathcal{C}_A(\ell_1, y_2; \eta) = 1 + \frac{N_c}{3C_A} \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \sinh^2\left(\frac{\mu_1(\ell_1, y_1) - \mu_2(\ell_2, y_2)}{2}\right)}. \quad (6.7)$$

La solution dominante de l'équation peut de même être écrite pour α_s variable si on utilise la définition de μ donnée par (5.104a) et (5.104b). Dans ce cas on a $\psi_\ell = \omega_0 + \dots = \gamma_0 e^\mu + \dots$ et $\psi_y = \nu_0 + \dots = \gamma_0 e^{-\mu} + \dots$, et on obtient la même expression (6.7) avec la définition de μ trouvée dans le cas physique (dans l'article C.3 nous donnons les expressions des dérivées logarithmiques obtenues par la méthode du col, voir (30a) et (30b)). Cette expression décrit la décroissance des corrélations lorsque $|\eta|$ augmente, soit lorsque le gluon d'énergie ω_2 est de plus en plus mou. Dans cette limite, les effets de cohérence dominent et $\mathcal{C}_A \rightarrow 1$; ceci peut se lire directement sur l'équation intégrale d'évolution (6.4) : lorsque $y_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_2 \Theta_2 \rightarrow Q_0$ l'intégration est nulle et le corrélateur tombe vers l'unité. Pour $\eta = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$, elle coïncide avec l'expression du corrélateur des multiplicités en DLA, soit [23]

$$\frac{\langle n(n-1) \rangle_{q\bar{q}}}{\bar{n}_{q\bar{q}}^2} = 1 + \frac{1}{3} N_c / 2C_F$$

dans le cas de l'annihilation e^+e^- .

6.1.1 Solution de l'équation (6.4) avec α_s variable

Il est utile d'obtenir, dans la solution de l'équation (6.4), les termes correcteurs liés à l'évolution du jet. Si (6.6) est une fonction régulière, on peut différencier C_A par rapport à ℓ_1 et y_2 . On obtient en différenciant les deux membres de (6.4) (ceci permet d'introduire les techniques de calcul utilisées dans l'article C.2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_A}{N_c}\right)^2 \left[\gamma_0^2 (C_A - 1) \left(2 + \frac{\psi_{G1,\ell} \psi_{G2,y} + \psi_{G1,y} \psi_{G2,\ell}}{\gamma_0^2} \right) + C_A (\chi_{A,\ell y} + \chi_{A,\ell} \chi_{A,y}) \right. \\ \left. + C_A (\chi_{A,\ell} (\psi_{G1,y} + \psi_{G2,y}) + \chi_{A,y} (\psi_{G1,\ell} + \psi_{G2,\ell})) \right] D_{G1} D_{G2} \quad (6.8) \\ = \left(\frac{C_A}{N_c}\right)^2 \gamma_0^2 \left[(C_A - 1) D_{G1} D_{G2} + \frac{N_c}{C_A} D_{G1} D_{G2} \right], \end{aligned}$$

on divise par $\left(\frac{C_A}{N_c}\right)^2 \gamma_0^2 D_1 D_2$, on définit

$$\chi_A = \ln [C_A],$$

où C_A est donné par (6.6),

$$\delta_{A1} = \frac{1}{\gamma_0^2} [\chi_{A,\ell} (\psi_{G1,y} + \psi_{G2,y}) + \chi_{A,y} (\psi_{G1,\ell} + \psi_{G2,\ell})],$$

$$\delta_{A2} = \frac{1}{\gamma_0^2} [\chi_{A,\ell y} + \chi_{A,\ell} \chi_{A,y}]$$

et on récrit (6.8) comme

$$(C_A - 1) \left(1 + \frac{\psi_{G1,\ell} \psi_{G2,y} + \psi_{G1,y} \psi_{G2,\ell}}{\gamma_0^2} + \delta_{A1} + \delta_{A2} \right) = \frac{N_c}{C_A} (1 - \delta_{A1} - \delta_{A2});$$

finally, la solution de l'équation pour α_s variable s'écrit sous la forme

$$C_A(\ell_1, y_2; \eta) = 1 + \frac{N_c}{C_A} \frac{1 - \delta_{A1} - \delta_{A2}}{1 + \frac{\psi_{G1,\ell} \psi_{G2,y} + \psi_{G1,y} \psi_{G2,\ell}}{\gamma_0^2} + \delta_{A1} + \delta_{A2}}$$

que l'on récrit de manière compacte ci-dessous :

$$C_A(\ell_1, y_2; \eta) = 1 + \frac{N_c}{C_A} \frac{1 - \delta_c}{1 + \Delta + \delta_c} \quad (6.9)$$

avec

$$\delta_c = \delta_1 + \delta_2, \quad \Delta = \frac{\psi_{G1,\ell} \psi_{G2,y} + \psi_{G1,y} \psi_{G2,\ell}}{\gamma_0^2}.$$

6.1.2 Ordre de grandeur des corrections (voir aussi le paragraphe 4.2 de C.2)

On a

$$\Delta = \mathcal{O}(1),$$

$$\chi_\ell \propto \frac{1}{\gamma_0^2} [\psi_{\ell\ell} \psi_y, \psi_\ell \psi_{y\ell}] \Rightarrow \chi_\ell = \mathcal{O}(\gamma_0^2),$$

$$\chi_{\ell y} \propto \frac{1}{\gamma_0^2} \psi_{\ell\ell} \psi_{yy} \Rightarrow \chi_{\ell y} = \mathcal{O}(\gamma_0^4).$$

Cela donne $\delta_1 = \mathcal{O}(\gamma_0)$ et $\delta_2 = \mathcal{O}(\gamma_0^2)$; ils représentent des corrections MLLA et NMLLA respectivement qui doivent être négligées dans le cadre DLA. Nous pouvons en tenir compte pour déceler le rôle de la variation de la constante de couplage par rapport au résultat (6.7). Dans l'appendice F de C.2 on compare (6.9) avec le résultat en MLLA qui tient compte de la conservation de l'énergie dans les cascades partoniques.

6.2 Approximation de Fong & Webber [12] en DLA (voir aussi [7])

Dans l'approximation de Fong & Webber pour le cas des corrélations [12], l'énergie des deux particules se trouve au voisinage du maximum de leur distribution inclusive [13], c'est à dire au voisinage de $Y/2$; $\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2$. Dans cette limite

$$\left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y}\right)^2 \ll 1$$

et on utilise l'expression de μ (5.114) au voisinage du maximum du spectre inclusif ; on a

$$\mu_k \simeq \frac{3}{2} - 3\frac{\ell_k}{Y};$$

puis

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \simeq -\frac{3}{2} \left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y}\right) \ll 1,$$

on peut donc effectuer l'expansion de Taylor suivante

$$\frac{1}{1 + \frac{4}{3} \sinh^2 \left(\frac{\mu_1(\ell_1, y_1) - \mu_2(\ell_2, y_2)}{2} \right)} \stackrel{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2}{\simeq} \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \frac{9}{4} \left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y} \right)^2} \quad (6.10)$$

$$\simeq 1 - 3 \left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y} \right)^2; \quad (6.11)$$

finalement

$$\mathcal{C}_A(\ell_1, y_2; \eta) \stackrel{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2}{\simeq} 1 + \frac{N_c}{3C_A} - \frac{N_c}{C_A} \left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y} \right)^2, \quad (6.12)$$

qui est en accord avec le résultat obtenu dans [12] en DLA. Pour α_s constant on utilise l'expression de μ (5.115)

$$\mu = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{Y - \ell}{\ell} \right) \stackrel{\ell \simeq Y/2}{\simeq} -\frac{2}{Y} (\ell - Y/2),$$

avec celle-ci

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \simeq -\left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y}\right) \ll 1,$$

et on obtient une expression du corrélateur en DLA

$$\mathcal{C}_A(\ell_1, y_2; \eta) \stackrel{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2}{\simeq} 1 + \frac{N_c}{3C_A} - \frac{4N_c}{9C_A} \left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y} \right)^2 \quad (6.13)$$

différente de (6.12) pour α_s constante. On reporte le lecteur au paragraphe 3.4 de l'article C.3 ; dans celui-ci nous expliquons dans quelle limite on peut considérer α_s comme une constante.

6.3 Conclusions et motivations

Le schéma de resommation DLA constitue, à petit x , le point de départ et le principal ingrédient dans l'évaluation des grandeurs inclusives en CDQ perturbative. Cette approche permet notamment de décrire la dynamique et la production multipartoniques. Elle a été utilisée pour prédire la forme des distributions inclusives, l'ordre de grandeur des multiplicités hadroniques dans les jets ainsi que le comportement des corrélations à deux particules. Néanmoins, que l'on considère α_s constante ou variable, elle est insuffisante pour effectuer des prédictions raisonnables que l'on puisse comparer avec les données expérimentales des grands collisionneurs de particules (LEP, Tevatron et futur LHC). En effet, l'approche DLA néglige le principe de conservation de l'énergie par la sous estimation du recul des particules chargées émettrices.

Cette approximation, même dans la limite des hautes énergies, surestime considérablement la production hadronique, les distributions inclusives des particules et les corrélations, du fait qu'elle viole la conservation de l'énergie. Par conséquent, dans l'objectif d'effectuer des prédictions raisonnables, un traitement consistant et rigoureux des corrections en logarithmes simples ("Single Logs" (SL) en anglais) s'avère nécessaire. Il s'agit de l'approximation MLLA dont on donnera toutes les sources physiques au prochain chapitre. Ceci constitue l'objectif des travaux C.1 pour le cas des distributions inclusives en fonction de l'impulsion transverse (k_\perp), puis C.2 et C.3 pour le cas des corrélations.

7 Approximation Logarithmique Dominante Modifiée (MLLA)

La lecture de ce chapitre aidera à la compréhension des travaux C.1, C.2 et C.3. On y étudie les techniques perturbatives qui permettent de décrire les propriétés des particules de petite fraction d'énergie ($x = k/E_{jet} \ll 1$) produites dans les collisions hadroniques. N'emportant qu'une partie négligeable de l'énergie totale du jet, elles font partie de la majorité des particules qui y sont produites.

7.1 Corrections en logarithmes simples (SL) aux cascades DLA

Nous avons démontré au chapitre précédent que la contrainte angulaire rigoureuse fournit les bases de l'interprétation probabiliste des processus de branchement des gluons mous rayonnés. Dans le cadre DLA :

$$k_f \ll k_j \ll k_i, \quad \Theta_{fj} \ll \Theta_{ji},$$

où l'on rappelle que i est le parton initiant le jet, j correspond à une première émission et f est son parton "enfant".

L'approche DLA est trop stricte pour donner des prédictions raisonnables. Quantitativement, elle surestime les grandeurs mesurables (multiplicités des gluons, spectre inclusive des gluons rayonnés, corrélations) dans les cascades partoniques car elle ignore la conservation de l'énergie lors des émissions de gluons mous. Elle surestime, en effet, l'énergie des partons qui se multiplient le plus facilement, soit les partons dont l'énergie est proche du maximum de la distribution inclusive ($\ell_{max} = Y/2$) (voir les paragraphes 5.7 et 5.11). Cette approximation tient compte des termes $\propto \sqrt{\alpha_s}$ qui interviennent dans la constante anormale γ , mais néglige les contributions $\Delta\gamma \sim \alpha_s$, donc celles d'ordre relatif $\sqrt{\alpha_s}$. En raison de quoi on introduit dans ce chapitre les corrections simplement logarithmiques (SL) qui tiennent compte des termes négligés en DLA, pour ainsi viser à des prédictions raisonnables qui puissent être comparées avec les données expérimentales des grands collisionneurs.

Lorsque l'on construit ainsi le schéma probabiliste en tenant compte des corrections doublement et simplement logarithmiques, on obtient une meilleure précision qui découle des contributions associées à l'accroissement du nombre d'interférences dont on ne tient pas compte en DLA. L'idée fondamentale du schéma probabiliste est fondée sur le principe selon lequel, dans une cascade, on ne tient compte que des plus proches voisins de manière semblable au cas du modèle d'Ising en théorie statistique des champs.

Pour comprendre et évaluer les corrections en logs simples que l'on doit ajouter aux contributions DLA, nous allons faire appel, de nouveau, à la notion de la Fonctionnelle Génératrice. Cette technique est raisonnable pour décrire la structure interne des cascades partoniques. Sa forme peut s'exprimer symboliquement comme [6] :

$$Z = C(\alpha_s(t)) \exp \left[\int^t \gamma(\alpha_s(t')) dt' \right]. \quad (7.1)$$

Cette représentation tient compte du fait que les émissions successives (par rapport au paramètre t "temps d'évolution") élémentaires indépendantes s'exponentient. Elle montre la propriété de localité intrinsèque du schéma probabiliste. A savoir, la dérivée de (7.1) par rapport au "temps t " fait apparaître un préfacteur $\gamma(\alpha_s(t))$ qui montre que le taux de variation de Z (et ainsi, du contenu partonique dans la cascade) dans le temps t est déterminé par la quantité $\gamma(t)$, dont la valeur ne dépend que de l'échelle de temps " t "; par conséquent, elle ne garde pas la trace du passé du système.

Si l'on compare cette observation avec les notations introduites au premier chapitre de [6], où le schéma de resommation LLA (“Leading Logarithmic Approximation”) a été traité, il apparaît naturel d’attribuer à γ la définition de constante anormale et à C , celle de fonction coefficient.

D’après la contrainte angulaire, le “temps d’évolution” t dans (7.1) doit être lié à l’angle d’ouverture du jet $dt = d\Theta/\Theta$. Ceci signifie que toutes les contributions qui sont singulières par rapport à l’angle entre les émissions partoniques doivent être incorporées dans l’exponentielle de (7.1). C’est ainsi que l’intégrale sur la constante anormale γ contient les chaînes de Markov des désintégrations successives qui respectent la contrainte angulaire (AO). Par ailleurs, le préfacteur C , étant sans divergence de masse ou libre de toute singularité collinéaire, décrit les configurations partoniques à plus grand angle dans l’évolution du système. Les termes successifs de la série perturbative qui interviennent dans le calcul de $\gamma(\alpha_s)$ peuvent s’écrire sous la forme symbolique (voir [6] et références ci-incluses)

$$\gamma = \sqrt{\alpha_s} + \alpha_s + \alpha_s^{3/2} + \alpha_s^2 + \dots; \quad (7.2)$$

ceci améliore de la fiabilité dans la description des désintégrations partoniques à petit angle $\Theta \ll 1$ et ainsi, dans l’évolution du jet. De plus, tenir compte des corrections dans le coefficient

$$C = 1 + \sqrt{\alpha_s} + \alpha_s + \dots$$

permet de considérer l’ensemble du nombre croissant des jets dans lesquels $\Theta_{ij} \sim 1$.

7.1.1 Estimation de $\gamma(\alpha_s)$

L’estimation de $\gamma(\alpha_s)$ découle des équations d’évolution DLA pour les multiplicités des jets dont la dépendance s’exprime en fonction de la dureté totale, c’est à dire le produit de l’énergie et de l’angle d’ouverture total du jet :

$$N(p\Theta) \approx \int^\Theta \frac{d\Theta'}{\Theta'} \left[\int_0^1 \frac{dz}{z} 4N_c \frac{\alpha_s}{2\pi} \right] N(zp\Theta'). \quad (7.3)$$

Si l’on compare (7.3) avec (7.1), on réalise que le terme entre crochets représente la dimension anormale. Puisque les deux termes de (7.3) contiennent des multiplicités, donc deux fonctions du même ordre de grandeur, les deux intégrations logarithmiques doivent se compenser. Ceci revient à effectuer l’analyse dimensionnelle de (7.3), soit

$$\int dt' \int \frac{dz}{z} \alpha_s \sim 1 \Rightarrow \ell^2 \alpha_s \sim 1 \Rightarrow \ell \sim \alpha_s^{-1/2}, \quad (7.4)$$

où nous avons utilisé les notations $\int dt' \sim \int \frac{dz}{z} \sim \log \equiv \ell$. Par définition,

$$\gamma^{DLA}(\alpha_s) = \int \frac{dz}{z} \alpha_s = \alpha_s \ell \sim \sqrt{\alpha_s}. \quad (7.5)$$

Lorsqu’on intègre sur $\gamma(\alpha_s)$, (estimé à partir de (7.1) (7.5)), on arrive à l’exponentielle caractéristique $\exp(c\sqrt{\ln E})$ qui décrit le taux de croissance des multiplicités des jets en fonction de l’énergie. Le terme sous-dominant, c’est à dire celui en $\Delta\gamma \sim \alpha_s$, entraîne également une dépendance non-négligeable dans l’énergie $\exp(c_1 \ln \ln E/\Lambda) \propto \alpha_s(E)^{-c_1}$ qui compense le terme croissant donné par DLA.

Pour décrire ces effets de manière consistante on doit étudier les sources physiques de ces corrections à partir de

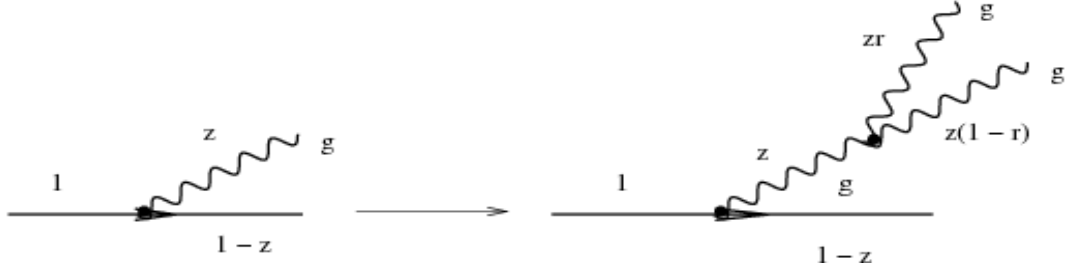


FIG. 27 – Effets de l'évolution de la constante de couplage sur $\gamma(\alpha_s)$

- **la variation de $\alpha_s(k_\perp)$** : elle est due à l'éventuelle influence de la dépendance de la constante de couplage en $\ln z$, soit $\alpha_s(\ln z)$, lors de l'émission d'un gluon g mou. Pour les diagrammes de la Fig.27 à gauche et à droite, on obtient respectivement les contributions

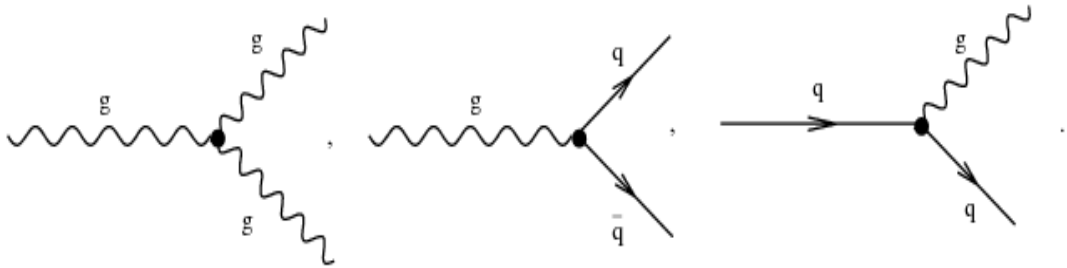
$$\gamma = \int \alpha_s \frac{dz}{z} = \alpha_s \ell \sim \sqrt{\alpha_s} \equiv \gamma^{DLA}, \quad \Delta\gamma = \int \alpha_s \frac{dz}{z} \alpha_s \frac{d(zr)}{(zr)} \Big|_{zr=z'} \int \underbrace{\alpha_s^2 \ell}_{\Delta\alpha_s} \frac{dz'}{z'} = \alpha_s^2 \ell^2 \sim \alpha_s.$$

Ainsi, contrairement au cas DLA où l'on fixe la constante anormale, il faut, dans l'objectif d'obtenir une estimation plus réaliste des observables, tenir compte de son évolution au cours de chaque émission. Ceci se généralise au cas d'un certain nombre d'émissions, pour trois vertex on aurait $\alpha_s^3 \ell^3 \sim \alpha_s^{3/2}$, pour quatre $\alpha_s^4 \ell^4 \sim \alpha_s^2$, on trouve ainsi d'autres corrections d'ordre supérieur ;

- **la production de partons dits "énergétiques"** : en DLA on néglige le recul du parton émetteur et, par conséquent, le principe de conservation de la quadri-impulsion. Nous devons aussi considérer les désintégrations en deux partons dont l'énergie est du même ordre de grandeur $z \sim 1$, et resommer leurs contributions

$$\Delta\gamma = \int \alpha_s dz \sim \alpha_s.$$

Les diagrammes donnant ce type de corrections sont les suivants ($g \rightarrow gg, g \rightarrow q\bar{q}, q \rightarrow qq$) :



En particulier, le diagramme du centre $g \rightarrow q\bar{q}$ n'est pas présent en DLA.

- **l'intégration angulaire exacte** : dans la région cinématique où les angles sont du même ordre de grandeur $\Theta_{fj} \sim \Theta_{ji} \sim \Theta_{fi}$ lors des émissions doublement molles ($g \rightarrow ggg$ et $q \rightarrow qgg$) d'une paire de gluons. Dans ce cas on a deux vertex, donc un α_s^2 qui intervient dans le carré de l'amplitude

$$\Delta\gamma = \int \alpha_s^2 \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} = \alpha_s^2 \ell^2 \sim \alpha_s.$$

Lorsqu'on tient compte de ces effets, on obtient symboliquement en MLLA

$$\gamma^{MLLA} = \sqrt{\alpha_s} + \alpha_s.$$

7.2 Probabilité de désintégration partonique dans le cadre MLLA

La section efficace différentielle en MLLA s'écrit sous la forme :

$$d\sigma_A^{BC} = \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{2\pi} \Phi_A^{BC}(z) dz V(\vec{n}) \frac{d\Omega}{8\pi}, \quad (7.6)$$

où

$$V_{j(i)}^f(\vec{n}) = \frac{a_{fi} + a_{ji} - a_{fj}}{a_{fj} a_{fi}} \quad (7.7)$$

et $\Phi_A^{BC}(z)$ sont les fonctions de désintégration partoniques d'Alterelli-Parisi [10], obtenues à 1-boucle en fonction de z , la fraction d'énergie emportée par l'un des enfants de A (B ou C) :

$$\Phi_q^{q[g]}(z) = C_F \frac{1+z^2}{1-z}, \quad \Phi_q^{g[q]}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_g^{q[\bar{q}]}(z) &= T_R (z^2 + (1-z)^2), \quad \Phi_g^{g[g]}(z) = 2C_A \left(\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z) \right), \\ C_A &= N_c, \quad C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c, \quad T_R = 1/2, \end{aligned} \quad (7.9)$$

N_c est le nombre de couleurs. De plus,

$$a_{ik} = q^2 \frac{p_i \cdot p_k}{(p_i \cdot q)(p_k \cdot q)} = 1 - \vec{n}_i \cdot \vec{n}_k = 1 - \cos \Theta_{ik}.$$

Ainsi, intégrer sur l'expression exacte des fonctions (7.8) revient à inclure les corrections en α_s qui restaurent la conservation de la quadri-impulsion : $\Delta\gamma = \int \alpha_s z^n dz \sim \alpha_s$. Les fonctions de désintégration (7.8) ont été en premier obtenues dans le cadre de l'évolution partonique du genre espace (virtualité croissante des enfants) de la diffusion profondément inélastique [4], mais elles interviennent, aussi, dans le cas de l'évolution de genre temps (virtualité décroissante des enfants) qui détermine l'évolution des jets jusqu'au stade de l'hadronisation [11]. Cette propriété est connue comme "la relation de réciprocité de Gribov-Lipatov" [4] et constitue l'une des plus élégantes symétries que les fonctions (7.8) satisfont. Puisque les gluons (quarks) sont rayonnés (émis) arbitrairement le long du parton j (symétrie cylindrique), on intègre (7.6) en prenant la moyenne azimutale le long du cône d'angle d'ouverture Θ_{ji} (voir appendice A.2)

$$\left\langle V_{j(i)}^f(\vec{n}) \right\rangle_{\text{moyenne azimutale}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} V_{j(i)}^f(\vec{n}) = \frac{2}{a_{fj}} \vartheta(a_{ji} - a_{fj}), \quad (7.10)$$

où ϑ est la fonction de Heaviside. C'est ainsi que (7.6) se réduit à la section efficace différentielle du processus $A \rightarrow B + C$ dans un jet :

$$d\sigma_A^{BC} = \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{2\pi} \Phi_A^{BC}(z) dz \frac{d\Theta^2}{\Theta^2} = \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{\pi} \Phi_A^{BC}(z) dz dt, \quad dt = \frac{d\Theta}{\Theta} \quad (7.11)$$

à l'intérieur du cône $\Theta_{ji} \geq \Theta_{fj}$ et s'annule $d\sigma_A^{BC} = 0$ à l'extérieur $\Theta_{ji} < \Theta_{fj}$. Par conséquent, la contrainte angulaire rigoureuse $\Theta_{ji} \gg \Theta_{fj}$ en DLA est remplacée par la contrainte angulaire stricte $\Theta_{ji} \geq \Theta_{fj}$ en MLLA (voir C.2).

7.3 Equation Maître dans le cadre de l'approximation MLLA

Lorsque l'on étudie des observables telles que les multiplicités, les fluctuations des multiplicités, le spectre inclusif d'une particule ou les corrélations dans les systèmes partoniques, on peut remplacer le noyau $V(\vec{n})$ dans la section efficace (7.6) par la moyenne azimutale (7.10). Ceci permet de construire des équations d'évolution simples pour les FG's qui satisfont la contrainte angulaire stricte découlant de (7.10).

Le système d'équations, inspiré de (5.61) en DLA, pour les fonctionnelles Z_G , $Z_{F \equiv Q, \bar{Q}}$ qui décrit l'ensemble partonique d'un jet initié par un gluon (G) ou un quark, anti-quark ($F \equiv Q\bar{Q}$) d'impulsion initiale p et qui produit un jet d'angle d'ouverture Θ est donné par ($A, B, C = F, G$)

$$Z_A(p, \Theta; u(k)) = e^{-\omega_A(p\Theta)} u_A(k=p) + \frac{1}{2} \sum_{B,C} \int_{Q_0/p}^{\Theta} \frac{d\Theta'}{\Theta'} \int_0^1 dz e^{-\omega_A(p\Theta) + \omega_A p\Theta'} \\ \times \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{2\pi} \Phi_A^{BC}(z) Z_B(zp, \Theta'; u) Z_C((1-z)p, \Theta'; u). \quad (7.12)$$

Le premier terme dans le membre de droite de (7.12) correspond au cas où le parton A qui initie le jet ne rayonne pas. Cette probabilité est, en particulier, supprimée par le facteur de forme de Sudakov dans l'exponentielle. Le terme dans l'intégrale décrit le premier branchement $A \rightarrow B + C$ (voir Fig.28) et $\Theta' \leq \Theta$ (condition cinématique) est l'angle entre B et C . La multiplication par l'exponentielle dans l'intégrand garantit que cette émission est le premier évènement et que nul d'autre n'a lieu entre l'angle d'ouverture du jet Θ et Θ' ; autrement dit, la probabilité pour qu'il y ait une émission à l'intérieur du créneau angulaire (Θ, Θ') est supprimée par le facteur de Sudakov. Z_B et Z_C constituent le point de départ dans l'évolution des sous-jets B et C ; leur énergie est inférieure à celle du parton A . De nouveaux partons

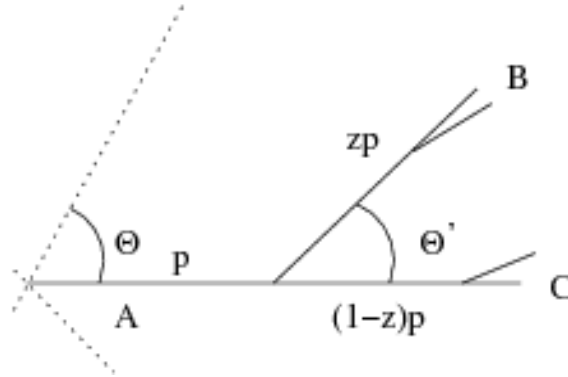


FIG. 28 – Branchement $A \rightarrow B + C$.

sont ainsi émis par B et C , tels qu'on associe, à chaque vertex, une nouvelle équation du type (7.12). Ceci met notamment en évidence le caractère itératif des processus de branchement qui a inspiré ce modèle pour ainsi décrire la dynamique partonique des jets ("*parton shower picture*" en anglais).

7.3.1 Facteurs de forme de Sudakov en MLLA

Les expressions des facteurs de forme de Sudakov sont les suivantes :

$$\omega_F = \int_{Q_0/p}^{\Theta} \frac{d\Theta'}{\Theta'} \int_0^1 dz \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{2\pi} \Phi_F^F(z); \quad (F = Q, \bar{Q}), \quad (7.13)$$

$$\omega_G = \int_{Q_0/p}^{\Theta} \frac{d\Theta'}{\Theta'} \int_0^1 dz \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \Phi_G^G(z) + n_f \Phi_G^F(z) \right]. \quad (7.14)$$

Les singularités infrarouges et colinéaires, présentes dans (7.12-7.14) doivent être régularisées en imposant les contraintes perturbatives relatives à l'impulsion transverse des partons émis. Nous l'écrivons ici sous la forme

$$k_{\perp} \approx pz(1-z)\Theta' > Q_0.$$

On multiplie (7.12) par $e^{\omega_A(p\Theta)}$, puis on dérive les deux membres de l'équation par rapport à $\ln \Theta$ et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Theta} Z_A(p, \Theta; u(k)) + Z_A(p, \Theta; u(k)) \frac{d\omega_A(p\Theta)}{d \ln \Theta} &= \frac{1}{2} \sum_{B,C} \int_0^1 dz \\ &\times \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{2\pi} \Phi_A^{BC}(z) Z_B(zp, \Theta; u) Z_C((1-z)p, \Theta; u), \end{aligned} \quad (7.15)$$

or,

$$\frac{d\omega_A(p\Theta)}{d \ln \Theta} = \frac{1}{2} \sum_{B,C} \int_0^1 dz \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{2\pi} \Phi_A^{BC}(z),$$

ce qui permet de récrire (7.15) sous la forme compacte

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Theta} Z_A(p, \Theta; \{u\}) &= \frac{1}{2} \sum_{B,C} \int_0^1 dz \Phi_A^{B[C]}(z) \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{\pi} \\ &\left(Z_B(zp, \Theta; \{u\}) Z_C((1-z)p, \Theta; \{u\}) - Z_A(p, \Theta; \{u\}) \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

L'équation (7.16) contient l'information des propriétés MLLA du jet moyennée sur l'angle azimutal. La $n^{\text{ème}}$ dérivée variationnelle de Z_A par rapport aux fonctions de sondage $u(k_i)$ au voisinage de $u = 0$ permet d'obtenir la $n^{\text{ème}}$ section efficace $d\sigma^n$ exclusive qui correspond à la production de n partons. L'expansion de Z_A autour de $u = 1$ permet, à son tour, de générer les distributions inclusives et les corrélations (voir le chapitre 5).

7.3.2 Condition initiale et normalisation

La condition initiale pour résoudre les système d'équations (7.16) est

$$Z_A(p, \Theta; \{u\})|_{p\Theta=Q_0} = u_A(k=p). \quad (7.17)$$

Q_0 est l'impulsion transverse minimale. Si l'impulsion de A est celle du cut-off, il ne se produit pas de branchement et le jet n'est constitué que du parton qui l'a initié, c'est ce que l'on appelle "terme de Born". Ceci se lit directement sur l'équation (7.12), en effet, l'intégration devient nulle dans cette limite.

La normalisation des fonctionnelles génératrices, déjà rencontrée au chapitre 5

$$Z_A(p, \Theta; \{u\})|_{u(k) \equiv 1} = 1 \quad (7.18)$$

peut se vérifier dans le cadre MLLA sans difficulté. En effet, si on pose $Z \equiv 1$ et $u \equiv 1$ dans (7.12) on obtient

$$e^{\omega_A(p\Theta)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{B,C} \int_{Q_0/p}^{\Theta} \frac{d\Theta'}{\Theta'} \int_0^1 dz \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{2\pi} \Phi_A^{BC}(z) e^{\omega_A(p\Theta')};$$

ceci entraîne directement (7.13) et (7.14) pour les probabilités totales de désintégration partoniques.

Le spectre inclusif d'une particule en MLLA s'obtient à partir de (7.16) en prenant la dérivée $\delta/\delta u(k_a)$ de la fonctionnelle génératrice Z_A et en tenant compte de (7.17) et (7.18)

$$\frac{d}{dY} x D_A^a(x, Y) = \int_0^1 dz \sum_B \Phi_A^B(z) \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{\pi} \left[\frac{x}{z} D_B^a\left(\frac{x}{z}, Y + \ln z\right) - \frac{1}{2} x D_A^a(x, Y) \right] \quad (7.19)$$

où

$$Y = \ln \frac{E\Theta}{Q_0}, \quad x = E_p/E.$$

7.4 Lien entre (7.19) et les équations de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) des fonctions de fragmentation partonique

Les équations d'évolution MLLA (7.16) sont identiques aux équations de DGLAP [10] à un détail près : la translation par $\ln z$ de la variable Y qui caractérise l'évolution du jet de dureté Q . Étant une conséquence directe de la contrainte angulaire (AO), cette modification est négligeable dans le cadre de l'approximation logarithmique dominante (LLA) en $(\alpha_s Y)$ pour des partons suffisamment énergétiques : $|\ln z| < |\ln x| = \mathcal{O}(1)$. C'est le cas des partons dans la diffusion profondément inélastique (DIS).

7.4.1 Cinématique “DIS”, variable de Bjorken

Dans la diffusion profondément inélastique, on considère le processus dans lequel un lepton (électron, positron etc) ultra-relativiste diffuse sur une cible (proton, neutron, noyau etc) (voir Fig.29). L'énergie du lepton est suffisamment importante pour qu'il se produise une interaction du type électrofaible (échange d'un γ^* , Z^0 , W^\pm) avec l'un des constituants de la cible (quarks etc). Dans ce processus, l'impulsion q du boson, du genre espace $Q^2 = -q^2 \gg M_p^2$, est transférée du lepton incident vers la cible. Ceci provoque sa brisure en un état multi-partonique → système multi-hadronique.

Soit M_p la masse invariante du proton, P ($P^2 = M_p^2$) sa quadri-impulsion, k et k' ($k^2 \approx k'^2 \approx 0$) les quadri-impulsions de l'électron incident et sortant respectivement, et $P + q$ celle du système multi-hadronique. On appelle x la fraction de la quadri-impulsion P emportée par le constituant frappé ; on peut donc l'écrire comme $p = xP$. La quadri-impulsion transférée est $q = k - k'$ et on s'intéresse à l'évaluation de son carré :

$$q^2 = (k - k')^2 = -2k.k' = -2(k_0 k'_0 - \vec{k}.\vec{k}') = -4k_0 k'_0 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \widehat{(\vec{k}, \vec{k}')} \right) < 0$$

est bien du genre espace, donc $Q^2 = -q^2 > 0$. Soit W la quantité (invariant de masse) qui mesure l'inélasticité du processus dans le système hadronique produit :

$$W^2 = (P + q)^2 - M_p^2 = q^2 + 2P.q = s(1 - x) \quad \text{avec} \quad x = \frac{Q^2}{2P.q} \leq 1, \quad (7.20)$$

où x est la variable de Bjorken. Si $x = 1$, le processus est dit élastique. “ x ” est la variable qui intervient dans les équations d'évolution partoniques de DGLAP, alors que dans les cas DLA et MLLA, il s'agit du paramètre de Feynman, soit de la fraction d'énergie totale du jet emportée par le parton.

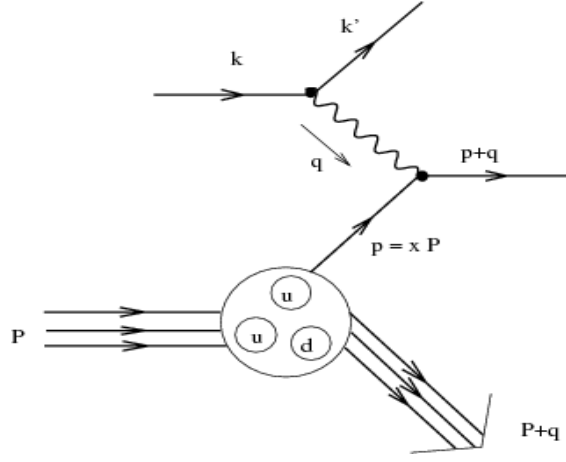


FIG. 29 – Diffusion profondément inélastique.

7.4.2 Equations d'évolution

L'espace de phase associé au processus du genre espace $A \rightarrow B+C$ qui détermine l'évolution des fonctions de structure dans la diffusion profondément inélastique ("DIS") a la forme suivante [4] :

$$d\sigma_A^{BC} = \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{2\pi} \frac{dz}{z} \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} \Phi_A^{BC}(z), \quad (7.21)$$

z est la fraction de l'impulsion longitudinale emportée par le parton B . Les fonctions Φ définies dans (7.8) jouent le rôle de "Hamiltonien" des observables partoniques dans le cadre LLA ("Leading Logarithmic Approximation" ou resommation de logarithmes collinéaires). Dans l'environnement "DIS", le parton initial A de virtualité négative (genre espace) pro-

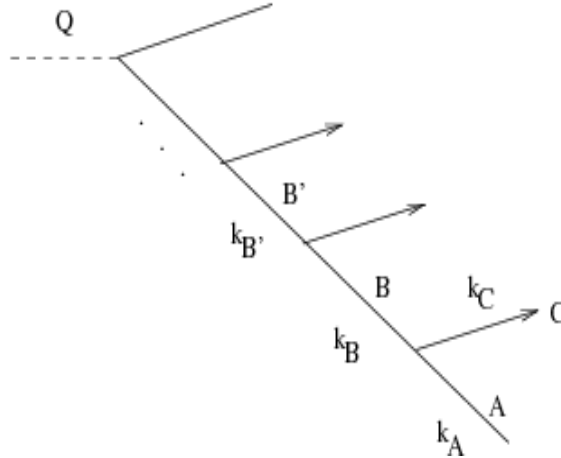


FIG. 30 – Diffusion profondément inélastique.

duit $B[z]$ de plus grande impulsion transverse $|k_B^2| \gg |k_A^2|$, ainsi que $C[1-z]$ de virtualité négative (genre temps). Le parton C génère un sous-jet de partons (\rightarrow hadrons) secondaires à la fin du processus. Puisqu'on ne s'intéresse pas à la structure des états finaux dans les processus inclusifs, mais aux distribution des états initiaux, on intègre sur la masse invariante du sous-jet C . L'intégration est dominée par la région $k_C^2 \ll |k_B^2|$ où l'état C est pris sur couche de masse si l'on compare avec B (le même argument a lieu pour A) ; cette région donne, en

effet, la contribution logarithmique dominante (“LLA”) au calcul de la section efficace. Les désintégrations partoniques en “LLA” fournissent un transfert d’impulsion important d’un parton cible A (“réel”) vers un état C (“réel”) par l’intermédiaire d’un état B de plus grande virtualité. À son tour, $B \equiv A'$, “réel” par rapport à B' ($|k_{B'}^2| \gg |k_A^2|$), devient la nouvelle cible à atteindre par le lepton et ainsi de suite. La contrainte angulaire stricte sur les angles d’émission que l’on a expliquée en MLLA est remplacée par la contrainte sur les impulsions des états partoniques successifs en LLA, c’est à dire

$$(|k_0|^2 \equiv) |k_A^2| \ll |k_B^2| \ll |k_{B'}^2| \cdots \ll Q^2,$$

où Q est la dureté du processus. Contrairement au cas MLLA, le temps de formations des états, de plus en plus virtuels, est de moins en moins grand. Dans ce cas, un système d’équations identique à (7.19) est obtenu :

$$\frac{\partial}{\partial Q^2} D_A^B(x, Q^2, k_0^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \sum_C \int_0^1 \frac{dz}{z} \Phi_C^B(z) \left[D_A^C\left(\frac{x}{z}, Q^2, k_0^2\right) - z^2 D_A^B(x, Q^2, k_0^2) \right] \quad (7.22)$$

lorsque l’on itère les cellules de Q^2 à k_0^2 ; inversement, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial k_0^2} D_A^B(x, Q^2, k_0^2) = -\frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \sum_C \int_0^1 \frac{dz}{z} \Phi_A^C(z) \left[D_C^B\left(\frac{x}{z}, Q^2, k_0^2\right) - z^2 D_A^B(x, Q^2, k_0^2) \right]. \quad (7.23)$$

Les fonctions de structure partoniques $D_A^B(x, Q^2, k_0^2)$ décrivent la probabilité de trouver à l’intérieur du nuage formé par la particule A un parton du type B de fraction d’impulsion longitudinale $x \leq 1$; le signe “=” correspond à la valeur de la virtualité maximale Q^2 que B peut atteindre. La somme sur les polarisations et les états de couleur est prise en compte. Nous considérons, au même titre, les distributions de quarks, anti-quarks et gluons “habillés” à l’intérieur des quarks, anti-quarks et gluons, tels que $A, B = q, \bar{q}, g$ ou $A, B = F, G$. Ces distributions partoniques LLA ne dépendent pas de k_0^2 et Q^2 mais de la combinaison ξ des deux quantités définies par

$$d\xi(k^2) \equiv \frac{\alpha_s(k^2)}{4\pi} \frac{dk^2}{k^2}, \quad \xi(Q^2) = \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{\alpha_s(k^2)}{4\pi}, \quad (7.24)$$

on remarque ainsi que les fonctions D_A^B dépendent de la différence $\Delta\xi$, par conséquent

$$D_A^B(x, Q^2, k_0^2) = D_A^B(x, \Delta\xi),$$

$$\Delta\xi = \xi(Q^2) - \xi(k_0^2) \approx \frac{1}{4N_c\beta} \ln \frac{\alpha_s(k_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{4N_c\beta} \ln \frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(k_0^2/\Lambda^2)} \quad (7.25)$$

où l’on a utilisé l’expression de la constante de couplage à une boucle pour déterminer l’expression analytique de $\Delta\xi$ [6]. La variable ξ peut être traitée comme un “temps d’évolution” et la matrice Φ comme le “Hamiltonien” du système. Nous rappelons que, dans le cas MLLA, l’évolution du système est du genre temps ; le “temps d’évolution” dans ce cas est donné par la variable $t = d\Theta/\Theta$ qui s’impose naturellement comme une conséquence inévitable de la contrainte angulaire (AO). Le système d’équations d’évolution qui s’écrit sous forme intégrale, qui satisfait les conditions initiales écrites ci-dessous et qui unifie (7.22) et (7.23), s’écrit sous la même forme que l’équation originale de Bethe-Salpeter [6]

$$D_A^B(x, \xi) = \delta_A^B \delta(1-x) + \sum_C \int_0^\xi d\xi' \int_0^1 \frac{dz}{z} \Phi_C^B(z) \left[D_C^B\left(\frac{x}{z}, \xi'\right) - z^2 D_A^B(x, \xi') \right]$$

$$= \sum_C \int_0^\xi d\xi' \int_0^1 \frac{dz}{z} \Phi_A^C(z) \left[D_C^B\left(\frac{x}{z}, \xi'\right) - z^2 D_A^B(x, \xi') \right]. \quad (7.26)$$

La nature des processus de branchement partoniques s'avère utile pour exprimer les distributions en termes de la transformation de Laplace-Mellin ; ceci permet par ailleurs d'écrire leur produit de convolution en un produit simple des distributions partoniques indépendantes qui correspondent à chaque émission dans l'espace conjugué.

On introduit les distributions partoniques $D_A^B(j)$ dans l'espace de Laplace-Mellin sous la forme

$$D_A^B(j, \xi) \equiv \int_0^1 dx x^{j-1} D_A^B(x, \xi) \quad (7.27)$$

que l'on insère dans (7.26) pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} D_A^B(j, \xi) = \sum_C (\Phi_A^C(j) - \delta_A^C \phi_C) D_C^B(j, \xi) = \sum_C (\Phi_C^B(j) - \delta_C^B \phi_C) D_A^C(j, \xi) \quad (7.28)$$

où les notations suivantes ont été introduites :

$$\Phi_A^C(j) \equiv \int_0^1 dz z^{j-1} \Phi_A^C(z), \quad (7.29a)$$

$$\phi_F \equiv \int_0^1 dz z [\Phi_F^F(z) + \Phi_F^G(z)] = \int_0^1 dz \Phi_F^F(z), \quad (7.29b)$$

$$\phi_G \equiv \int_0^1 dz z [\Phi_G^G(z) + 2n_f \Phi_G^F(z)] = \int_0^1 dz [z \Phi_G^G(z) + n_f \Phi_G^F(z)]. \quad (7.29c)$$

La solution de cette équation avec la condition initiale

$$D_A^B(j, \xi = 0) = \delta_A^B \quad (7.30)$$

donne les distributions en fonction de x lorsqu'on inverse la transformée de Mellin

$$D_A^B(x, \xi) = \int_{(\Gamma)} \frac{dj}{2\pi i} x^{-j} D_A^B(j, \xi) \quad (7.31)$$

dont l'intégration s'effectue le long de l'axe imaginaire. Le contour d'intégration Γ est choisi de sorte qu'il inclut toutes les singularités de $D(j)$ dans le plan complexe ($\Re j > 1$). Il est commode de représenter les distributions partoniques D_A^B sous une forme matricielle comme,

$$D_A^B(j, \xi) = \left(e^{\hat{H}\xi} \right)_A^B, \quad (7.32)$$

que l'on écrit en fonction du "Hamiltonien" du système :

$$\hat{H}_A^B(j) = \Phi_A^B(j) - \delta_A^B \phi_A. \quad (7.33)$$

Dans cette représentation l'état d'évolution partonique forme un vecteur qui s'écrit sous la forme

$$(F_{NS}, F_S, G). \quad (7.34)$$

La première composante décrit le quark de valence (distribution non-singlet par rapport à la saveur du groupe), le deuxième décrit la combinaison singlet des saveurs (quarks de la "mer")

et anti-quarks), et la troisième correspond à la propagation des gluons. Dans cette base, le “Hamiltonien” prend la forme [10]

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \nu_F(j) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_F(j) & 2n_f \Phi_G^F(j) \\ 0 & \Phi_F^G(j) & \nu_G(j) \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

où les trajectoires régularisées des quarks et des gluons ont été introduites :

$$\nu_F(j) \equiv \int_0^1 dz (z^{j-1} - 1) \Phi_F^F(z) \quad (7.36)$$

$$\nu_G(j) \equiv \int_0^1 dz [(z^{j-1} - z) \Phi_G^G(z) - n_f \Phi_G^F(z)] . \quad (7.37)$$

Les expressions analytiques de (7.36), (7.37) peuvent être écrites en fonction de la fonction standard ψ :

$$\psi(j) = \frac{d}{dj} \ln \Gamma(j); \quad \psi(j+1) = \psi(j) + 1, \quad \psi(1) = -\gamma_E \quad (7.38)$$

où $\gamma_E \approx 0.5772$ est la constante d’Euler. Finalement, (7.36), (7.37) et les transformées de Mellin des fonctions Φ_F^G, Φ_G^F satisfont

$$\nu_F(j) = -C_F \left[4\psi(j+1) + 4\gamma_E - 3 - \frac{2}{j(j+1)} \right], \quad (7.39a)$$

$$\nu_G(j) = -4N_c[\psi(j+1) + \gamma_E] + \frac{11N_c}{3} - \frac{2n_f}{3} + \frac{8N_c(j^2 + j + 1)}{j(j^2 - 1)(j + 2)}, \quad (7.39b)$$

$$\Phi_F^G(j) = 2C_F \frac{j^2 + j + 2}{j(j^2 - 1)}, \quad (7.39c)$$

$$\Phi_G^F(j) = \frac{j^2 + j + 2}{j(j+1)(j+2)}. \quad (7.39d)$$

D’après (7.35), les quarks de valence se propagent librement le long de la trajectoire $\nu_F(j)$, tandis que les quarks de la mer se mélangent avec les états gluoniques. La diagonalisation de (7.35) donne les “fréquences propres” :

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \nu_F(j) + \nu_G(j) \pm \sqrt{[\nu_F(j) - \nu_G(j)]^2 + 8n_f \Phi_F^G(j) \Phi_G^F(j)} \right\}. \quad (7.40)$$

On donne sans démonstration les solutions de (7.28) dans l’espace de Mellin [6][24] :

1. Distribution des quarks de valence (non-singlet)

$$D^{val}(j, \xi) = e^{\nu_F \xi}. \quad (7.41a)$$

2. Quark de la mer + anti-quarks dans le quark :

$$D_F^{sea}(j, \xi) = \frac{\nu_F(j) - \nu_-(j)}{\nu_+(j) - \nu_-(j)} e^{\nu_+ \xi} + \frac{\nu_+(j) - \nu_F(j)}{\nu_+(j) - \nu_-(j)} e^{\nu_- \xi} - e^{\nu_F \xi}. \quad (7.41b)$$

3. Distribution d'un gluon dans un quark :

$$D_F^G(j, \xi) = \frac{\Phi_F^G(j)}{\nu_+(j) - \nu_-(j)} (e^{\nu_+\xi} - e^{\nu_-\xi}). \quad (7.41c)$$

4. Distribution des quarks+anti-quark dans un gluon :

$$D_G^F(j, \xi) = \frac{2n_f \Phi_G^F(j)}{\nu_+(j) - \nu_-(j)} (e^{\nu_+\xi} - e^{\nu_-\xi}). \quad (7.41d)$$

5. Distribution d'un gluon dans un gluon :

$$D_G^G(j, \xi) = \frac{\nu_+(j) - \nu_F(j)}{\nu_+(j) - \nu_-(j)} e^{\nu_+\xi} + \frac{\nu_F(j) - \nu_-(j)}{\nu_+(j) - \nu_-(j)} e^{\nu_-\xi}. \quad (7.41e)$$

8 Compléments des articles

Des détails techniques seront donnés dans ce chapitre afin de faciliter la compréhension de certains aspects techniques des articles C.1, C.2 et C.3.

8.1 Inclusive hadronique distributions inside one jet at high energy colliders at “Modified Leading Approximation” of Quantum Chromodynamics C.1

8.1.1 Corrélation entre deux particules produites dans l'annihilation e^+e^- [24][25]

On considère la section efficace semi-inclusive de l'annihilation e^+e^- en deux particules h_1 et h_2 ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}h_1h_2$) de fractions d'énergie x_1 et x_2 et d'angle relatif de séparation Θ dans un jet (l'angle Θ dans le référentiel du laboratoire coïncide avec celui de la paire $q\bar{q}$ dans le centre de masse). Dans la jauge planaire, le processus ressemble à une cascade de branchements de désintégrations partoniques indépendantes. Considérons la désintégration du parton A en B et C , soit $A \rightarrow B + C$, qu'à leur tour s'hadronisent pour produire les particules h_1 et h_2 , voir la Fig.1 de C.1.

La cinématique est la suivante. Soit u la fraction de l'énergie du quark (ou de l'anti-quark) emportée par le parton A et $uz, u(1-z)$ celles des partons B et C respectivement ; nous allons intégrer sur les variables u et z . Avoir détecté les particules h_1 et h_2 d'angle de séparation relatif Θ permet de déterminer, en particulier, le point de branchement où l'émission du parton A a eu lieu dans la cascade partonique. Or, la contrainte angulaire (AO), permet de justifier l'approximation d'après laquelle l'angle entre les partons B et C est très proche de celui entre les hadrons h_1 et h_2 . De plus, les masses invariantes des jets hadroniques issus de B et C sont très inférieures à leur impulsion transverse relative, de sorte que la virtualité du parton C peut s'exprimer simplement en fonction de l'angle d'ouverture Θ entre les hadrons détectés comme

$$k_A^2 = (k_B + k_C)^2 \approx 2k_B k_C = 2 \left(\frac{q}{2} u z \right) \left(\frac{q}{2} u (1-z) \right) (1 - \cos \Theta).$$

Les premiers stades du processus, illustrés dans la Fig.1 de C.1 et la Fig.31, à savoir la production du parton virtuel A , ainsi que les produits de sa désintégration, sont décrits par les fonctions de structure d'annihilation dont la dépendance est douce en k_A^2 . Par conséquent,

le préfacteur d'ordre 1 qui est lié à la redistribution de l'énergie dans le processus $A \rightarrow B+C$ peut (dans le cadre DLA) être considéré à part :

$$k_A^2 \sim q^2 \sin^2 \Theta / 2 \stackrel{\Theta \ll 1}{\approx} q^2 \Theta^2.$$

Ainsi, fixer l'angle Θ entre les deux hadrons détermine le temps de production ("date de naissance") du parton père A , $\xi = \xi(q^2 \Theta^2)$ (voir 7.25).

Dans le but d'obtenir l'équation différentielle qui nous intéresse, on doit multiplier l'amplitude de la Fig.1 par sa complexe conjuguée et intégrer sur l'impulsion des particules non détectées dans le processus (voir Fig.31) ; nous devons exprimer l'amplitude en échelle en termes des fonctions de structure correspondantes. Nous donnons la définition des fonctions

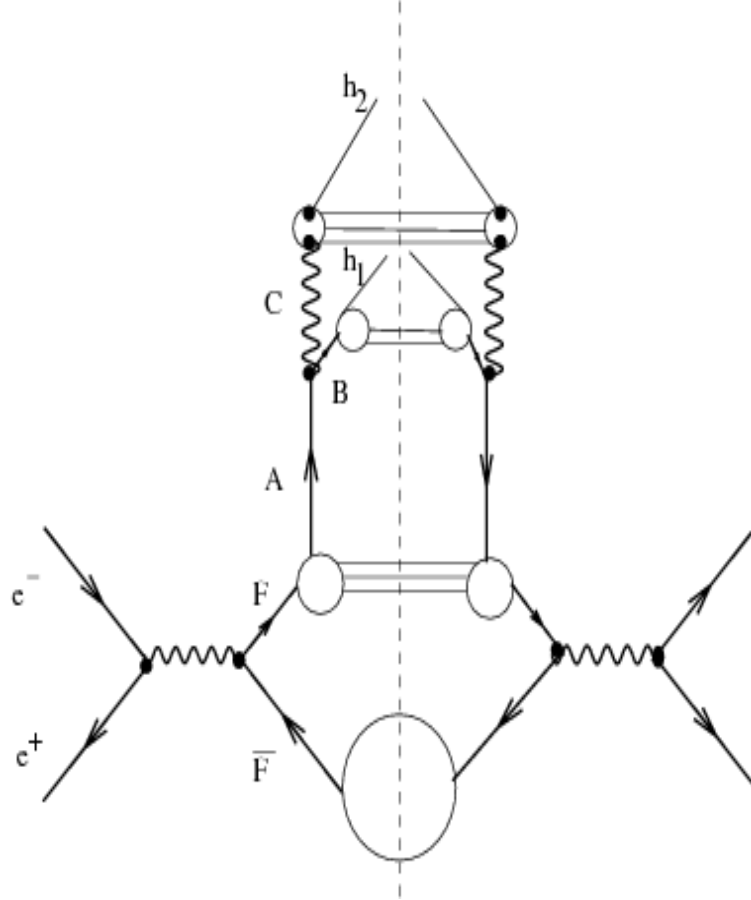


FIG. 31 – Carré de l'amplitude de la Fig.1 de l'article

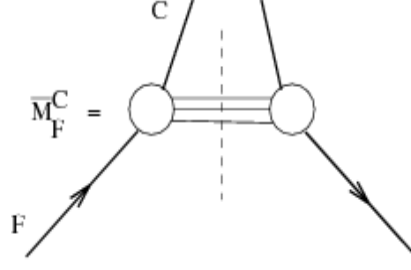
de structure d'annihilation. Si à l'état final, A (hadron ou parton avec des degrés de couleur) est l'unique particule de fraction d'énergie z_A qui a été détectée, la section efficace différentielle est donnée par l'expression

$$\frac{d\sigma}{dz_A d\Omega_{jet}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{jet}} \right)_0 \sum_F^{2n_f} e_F^2 \bar{D}_F^A \left(z_A, \xi(q^2) - \xi(k_A^2) \right), \quad (8.1)$$

où $(d\sigma/d\Omega_{jet})_0$ est la section efficace de Born correspondante à l'annihilation e^+e^- en une paire de quarks $q\bar{q}$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{jet}} \right)_0 = 3 \frac{\pi \alpha^2}{2q^2} \frac{1 + \cos^2 \Psi}{2\pi}, \quad (8.2)$$

Ψ est l'angle entre l'axe de la collision et celui de production de la paire. k^2 représente la virtualité de la particule détectée. La fonction de structure \bar{D} est liée à l'amplitude invariante \bar{M}_F^C



moyennée sur les états de polarisation et de couleur de la particule $C(F)$ et intégrée sur la virtualité du parton sortant F jusqu'à la limite supérieure q^2 du "partonomètre", par la formule

$$z_A \bar{D}_F^A(z_A, \xi(q^2) - \xi(k_A^2)) = \bar{M}_F^A. \quad (8.3)$$

Le parton A de virtualité $k_A^2 \sim q^2 \sin^2 \Theta/2$ joue, au stade final du processus, le même rôle que le photon virtuel q^2 à son stade initial. Par conséquent, la production inclusive des hadrons h_1 et h_2 dans les sous-jets B et C est respectivement décrite par les fonctions de structure :

$$\bar{D}_B^{h_1}\left(\frac{x_1}{z_B}, \xi(k_A^2) - \xi(\mu^2)\right), \quad \bar{D}_C^{h_2}\left(\frac{x_2}{z_C}, \xi(k_A^2) - \xi(\mu^2)\right).$$

La section efficace différentielle s'écrit enfin sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{jet} dx_1 dx_2 d \ln \left(\sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) \frac{d\phi}{2\pi}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{jet}} \right)_0 \sum_{F,A,B,C} e_F^2 \int \frac{du}{u^2} \int \frac{dz}{z(1-z)} \bar{D}_F^A(u, \xi_q - \xi_0) \Phi_A^{BC}(z) \frac{\alpha_s(k_A^2)}{4\pi} \bar{D}_B^{h_1}\left(\frac{x_1}{zu}, \xi_A\right) \bar{D}_C^{h_2}\left(\frac{x_2}{(1-z)u}, \xi_A\right) \quad (8.4)$$

qui devient 2.1 (on utilise la définition $\xi(\mu^2) = 0$, $\xi(k_A^2) = \xi_A$).

8.1.2 Espace de phase dans (8.4)

À l'origine, l'intégration dans (8.4) (voir Fig.31) doit avoir lieu sur les quatre composantes de la quadri-impulsion k , tandis que le résultat ne présente que les intégrations sur les fractions d'énergie de h_1 et h_2 . Comment se fait-il que les autres composantes, disons celles de k_A^2 soient fixées ? Nous avons déjà mentionné l'analogie entre la désintégration $A \rightarrow h_1 + h_2 + X$ et l'annihilation. Si l'on se plaçait dans le référentiel de la particule A , les partons B et C se déplaceraient dans le sens opposé. Par analogie avec l'annihilation semi-inclusive e^+e^- en une paire de deux particules, on peut écrire la probabilité du processus $A \rightarrow h_1 + h_2$ sous la forme :

$$\frac{d\sigma^{A \rightarrow h_1 + h_2 + X}}{dk_{\perp}^2} \propto \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\partial}{\partial \ln k_{\perp}^2} \left\{ \bar{D}_C^{h_1}(x_1, k_{\perp}^2) \bar{D}_B^{h_2}(x_2, k_{\perp}^2) \right\}, \quad (8.5)$$

où

$$x_1 \equiv \frac{2p_1 k}{k^2}, \quad x_2 \equiv \frac{2p_2 k}{k^2},$$

et k_{\perp} est la composante du quadri-moment k_A du "photon" virtuel A projeté sur l'hyperplan formé par (p_1, p_2) , tel que l'on effectue la décomposition de Sudakov suivante :

$$k_A = \frac{1}{x_1} p_1 + \frac{1}{x_2} p_2 + k_{\perp}.$$

Avec la représentation (8.5) pour la probabilité de désintégration, on peut intégrer sur le quadri-moment k_A que l'on écrit en termes des variables de Sudakov :

$$dk_A^2 = d\left(\frac{1}{x_1}\right) d\left(\frac{1}{x_2}\right) d^2k_\perp \frac{(2p_1p_2)}{2} = \frac{k_A^2}{2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} d^2k_\perp.$$

Puisqu'en LLA, la contribution essentielle est uniquement dominée par la région $k_\perp^2 \ll k_A^2$ nous prenons l'intégrale de (8.5) sur la dérivée totale de la composante perpendiculaire k_\perp :

$$dk_A^2 \frac{d\sigma^{A \rightarrow h_1+h_2}}{dk_\perp^2} \propto \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \bar{D}_C^{h_1}(x_1, k_\perp^2) \bar{D}_B^{h_2}(x_2, k_\perp^2).$$

Par conséquent, pour compenser la dépendance douce de (8.5) en fonction de $\ln k_\perp^2$ en LLA, la quadri-impulsion du parton père A doit, en moyenne, se trouver sur le plan des quadri-impulsions des hadron h_1 et h_2 :

$$k_A \approx \frac{1}{x_1}p_1 + \frac{1}{x_2}p_2, \quad k_A^2 \approx q^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}.$$

Pour obtenir la section efficace du processus (8.4), on intègre sur l'énergie de la particule A et le transfert d'énergie relatif z dans $A \rightarrow B + C$:

$$\frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dz}{z(1-z)} \frac{du}{u}$$

et on insère les facteurs de normalisation qui lient l'amplitude invariante aux fonctions de structure.

8.1.3 Calcul des termes intervenant dans l'expression du courant de couleur

Nous avons, en particulier, utilisé les solutions des équations d'évolution de DGLAP (7.26) dans le calcul de $\langle u \rangle_{A_0}^A$ et $\delta \langle u \rangle_{A_0}^A$ qui sont définis en termes des fonctions de fragmentation partoniques $D_{A_0}^A$ dans les formules (4.7) et (4.8) respectivement :

$$\langle u \rangle_{A_0}^A \approx \int_0^1 du u D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, E\Theta), \quad \delta \langle u \rangle_{A_0}^A \approx \int_0^1 du (u \ln u) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, E\Theta). \quad (8.6)$$

On utilise (7.41a)-(7.41e) pour calculer (8.6) dans C.1, soit

$$\langle u \rangle_{A_0}^A = \mathcal{D}_{A_0}^A(2, \xi(E\Theta_0) - \xi(E\Theta)), \quad \delta \langle u \rangle_{A_0}^A = \frac{d}{dj} \mathcal{D}_{A_0}^A(2, \xi(E\Theta_0) - \xi(E\Theta)) \Big|_{j=2}$$

dont les solutions ont été explicitement données dans l'appendice C du même article.

8.1.4 Comparaison des prédictions avec les résultats préliminaires de CDF

Nous comparons nos prédictions pour les distributions inclusives en fonction de l'impulsion transverse k_\perp avec les résultats préliminaires de CDF dans le cas du mélange des jets de quarks et de gluons que nous avons évoqué au paragraphe 5.4.1. Le nombre total de particules chargées représente 60% du nombre total de particules produites. Puisque $N^{ch} \approx N^{MLLA}$ ¹⁵

¹⁵le nombre de particules chargées est approximativement égal au nombre de particules tel qu'il est prédit par le schéma MLLA

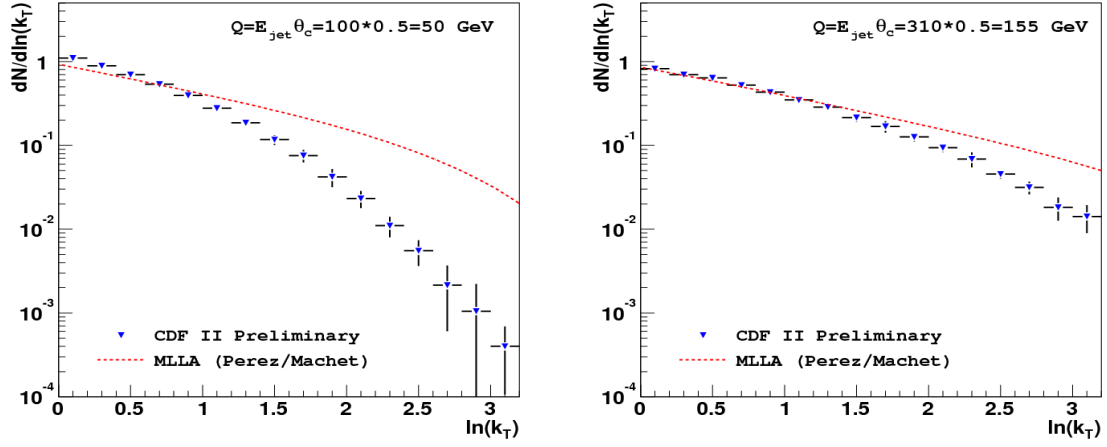


FIG. 32 – Comparaison des prédictions MLLA avec les données de CDF pour $Q = 55$ GeV ($Y = 5.2$, gauche) et $Q = 155$ GeV ($Y = 6.4$, droite).

(résultat expérimental) où N^{MLLA} est la prédiction MLLA des multiplicités dans les jets hadroniques [28], $\mathcal{K}^{ch} \approx 0.56 \pm 0.10$. Ainsi, la distribution des particules chargées en fonction de k_{\perp} est donnée par la combinaison linéaire au facteur \mathcal{K}^{ch} près, c'est à dire

$$\left(\frac{dN}{d \ln k_{\perp}} \right)^{ch} = \mathcal{K}^{ch} \left[\omega \left(\frac{dN}{d \ln k_{\perp}} \right)_g + (1 - \omega) \left(\frac{dN}{d \ln k_{\perp}} \right)_q \right]$$

où $\omega = 0.44$ est le paramètre de mélange. La Fig.32 confirme, en particulier, l'accord remarquable entre nos prédictions et les données à petit $k_{\perp} = xE\Theta$ (car petit “ x ” et “ Θ ”) dans l'intervalle de validité MLLA. Pour $Y = 5.2$ ($Q = 55$ GeV) nous avons prédit $1 \leq \ln(k_{\perp}/Q_0) \leq 2.7 \Rightarrow 0 \leq \ln(k_{\perp}/1 \text{ GeV}) \leq 1.5$ et pour $Y = 6.4$ ($Q = 155$ GeV), $1 \leq \ln(k_{\perp}/Q_0) \leq 3.9 \Rightarrow 0 \leq \ln(k_{\perp}/1 \text{ GeV}) \leq 2.6$. A savoir, l'intervalle de confiance est d'autant plus grand que l'échelle d'énergie est importante. Voir les explications détaillées dans C.1.

Cette accord remarquable constitue également une nouvelle confirmation de l'hypothèse de dualité locale parton hadron (LPHD).

8.2 Two-particle correlations inside one jet at “Modified Leading Logarithmic Approximation” of Quantum Chromodynamics I : Exact solution of the evolution equations at “small x ”, C.2

L'unique calcul des corrélations qui avait été effectué jusqu'alors dans le cadre MLLA est celui par Fong et Webber [12] en 1991. Ils ont écrit les équations d'évolution MLLA sous forme différentielle et les ont résolues dans l'approximation où les énergies des deux partons sont quasiment identiques, en plus de les situer au voisinage du maximum de leur distribution inclusive [6] :

$$\ell_1 \approx \ell_2 \approx \frac{Y}{2} + a\gamma_0.$$

Nous avons effectué un calcul de cette observable, en CDQ perturbative, qui nous a permis d'étendre le résultat à toutes les valeurs possibles de x . Nous avons trouvé, pour l'intervalle de validité de l'approximation des petits “ x ”, la limite inférieure $x_{min} \approx 0.08$ ($\ell_{max} \approx 2.5$)

au seuil d'énergie des présents accélérateurs, celle-ci est en accord avec celle que l'on trouve dans l'article C.1 pour le cas des distributions inclusives en fonction de k_{\perp} .

8.2.1 Comparaison entre les corrélations en DLA et MLLA, appendice F

Nous avons comparé la formule DLA des corrélations (6.9) avec la (5.2) de C.2. Ceci permet d'observer le rôle de la variation de la constante de couplage ainsi que l'importance de la conservation de l'énergie dans l'étude de cette observable.

8.3 Two-particle correlations inside one jet at "Modified Leading Logarithmic Approximation" of Quantum Chromodynamics ; II : Steepest descent evaluation of the single inclusive distribution at small x , C.3

8.3.1 Spectre inclusif d'une particule en MLLA ; méthode du col

Les équations d'évolution qui découlent de (7.16), ont été obtenues dans la partie I de C.3, dans l'approximation des petits x :

$$G(\ell, y) = \delta(\ell) + \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' \gamma_0^2(\ell' + y') \left(1 - a\delta(\ell' - \ell)\right) G(\ell', y'), \quad (8.7)$$

$$Q(\ell, y) = \delta(\ell) + \frac{C_F}{N_c} \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' \gamma_0^2(\ell' + y') \left(G(\ell', y') - \frac{3}{4}\delta(\ell' - \ell)\right) G(\ell', y'). \quad (8.8)$$

Si on fait l'analyse dimensionnelle de (8.7) et (8.8) en utilisant $\ell \sim \alpha_s^{-1/2}$ (voir 7.4), on constate que le terme $\propto 1$ est bien $\mathcal{O}(1)$ et que ceux qui sont proportionnels à a et $\frac{3}{4}$ incluent les corrections simplement logarithmiques $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha_s})$. Elles découlent de l'intégration exacte sur les fonctions de désintégrations partoniques (7.8). La dépendance de la dimension anormale en $(\ell + y)$, ainsi que l'intégration exacte sur $y(\Theta)$ donnent des corrections du même ordre de grandeur.

L'expression de G , solution exacte de (8.7) dans l'espace de Mellin, qui généralise (5.94)¹⁶ au cadre MLLA est démontrée dans l'appendice D de C.2.

$$G(\ell, y) = (\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell + \nu y} \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta} e^{-\lambda s}. \quad (8.9)$$

Le terme en puissance de a/β fait la différence par rapport à (5.94) et peut être considéré comme une faible perturbation du terme dominant en DLA. L'objectif est d'estimer (8.9) par la méthode du col ; il est ainsi suffisant de remplacer le point de col (ω_0, ν_0) obtenu en DLA (5.103) dans cette correction (voir l'appendice B.2) ; le résultat s'écrit alors sous la forme

$$G(\ell, Y) \approx \hat{\mathcal{N}}(\mu, \nu, \lambda) \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - \nu}{\sinh \mu - \sinh \nu} + \nu - \frac{a}{\beta}(\mu - \nu) \right]$$

pour $Y + \lambda \gg 1$ et $\lambda \gg 1$, où

$$\hat{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \times \left(\frac{Y + \lambda}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{a}{\beta}}.$$

¹⁶Ici on change de notation, en effet, il s'agit de la même fonction, soit $G \equiv D$

La fonction $\mathcal{N}(\mu, v)$ est donnée dans (5.107). Nous pouvons de même normaliser (8.10) par l'expression en MLLA de la multiplicité d'un jet, c'est à dire

$$\bar{n}(Y) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{Y + \lambda}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{a}{\beta} + \frac{1}{4}} \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \right]$$

pour récrire (8.10) sous la forme qui généralise (5.109) au cadre MLLA

$$\frac{G(\ell, Y)}{\bar{n}(Y)} \approx \sqrt{\frac{\beta^{1/2} (Y + \lambda)^{3/2}}{\pi \cosh v \text{Det} A(\mu, v)}} \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \left(\frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} - 1 \right) + v - \frac{a}{\beta} (\mu - v) \right]. \quad (8.10)$$

Le maximum de la distribution peut être déterminé à partir de (8.10) en utilisant (5.112). Ceci entraîne

$$\ell_{max} = \underbrace{\frac{Y}{2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\beta} \left(\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right)}_{MLLA} > \underbrace{\frac{Y}{2}}_{DLA}. \quad (8.11)$$

(8.10) reproduit la forme gaussienne de la distribution au voisinage de (8.11)

$$\frac{G(\ell, Y)}{\bar{n}(Y)} \approx \left(\frac{3}{\pi \sqrt{\beta} [(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{2}{\sqrt{\beta}} \frac{3}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \frac{(\ell_{max} - \ell)^2}{2} \right).$$

La position du maximum du spectre inclusif d'une particule est donc décalée vers les plus grandes valeurs de ℓ , soit vers les plus petits x ; ce décalage est une conséquence de la conservation de l'énergie dans les processus de branchements partoniques. Dans la Fig.33, nous comparons le spectre normalisé en DLA (5.109) et celui en MLLA (8.10). Bien que (8.10)

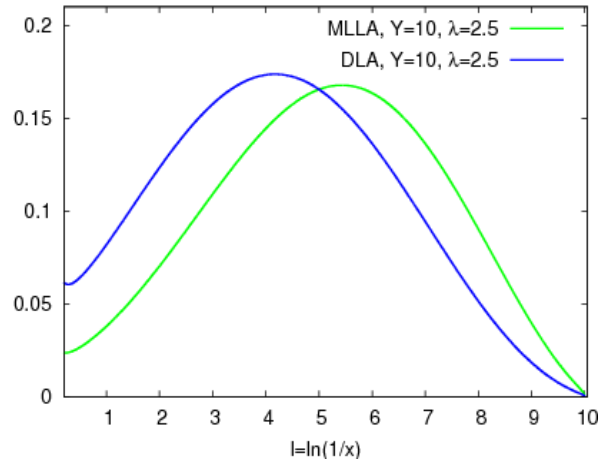


FIG. 33 – Spectre inclusif en DLA (5.109, bleu), en MLLA (8.10, vert) pour $Y = 10.0$, $\lambda = 2.5$; $\ell_{max}^{DLA} = 5.0$, $\ell_{max}^{MLLA} \approx 6.3$.

n'est pas stable dans la limite infrarouge $\lambda \rightarrow 0$, car il faut que $\lambda \gg 1$ pour garantir la convergence des méthodes perturbatives, on s'intéresse à cette limite. Cela nous a permis de comparer, dans la Fig.34, la forme du spectre obtenue par la méthode du col et celle qui a été obtenue à partir de (8.9) pour $\lambda = 0$ [6][11] ("limiting spectrum" en anglais). En effet,

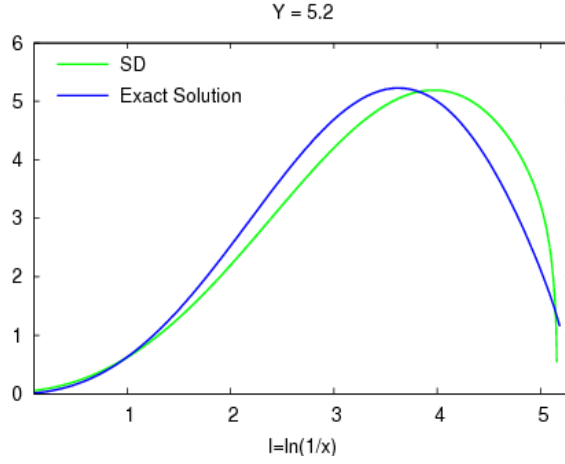


FIG. 34 – Forme du spectre inclusive donnée par la méthode du col et la méthode exacte : formule 7.55 de [6].

on obtient une bonne allure pour la distribution car celle-ci ne dépend pas du paramètre λ , seulement sa normalisation en dépend.

La méthode du col permet par conséquent de donner la vraie forme du spectre, la position du pic et reproduit de même son allure à $\lambda \neq 0$ ($Q_0 \neq \Lambda_{QCD}$). Cette dernière a été donnée en effectuant une intégration numérique de la formule (7.12) de [6] dans le plan complexe [11].

8.3.2 Dérivées logarithmiques obtenues par la méthode du col (utile pour la paragraphe 2.4 de C.3)

Certains détails des calculs effectués dans C.3 sont donnés ici afin de mieux comprendre l'origine des corrections MLLA ; après avoir exponentié la dépendance en (ℓ, y) du terme \hat{N} et avoir obtenu la fonction dans l'exponentielle de (8.10) que l'on a écrite sous la forme :

$$\psi = \phi + \delta\psi, \quad (8.12)$$

où

$$\phi = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\ell + y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} \quad (8.13)$$

est le terme dominant qui a été trouvé en DLA et

$$\delta\psi = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta} \right) \ln(\ell + y + \lambda) - \frac{a}{\beta} \mu + \left(1 + \frac{a}{\beta} \right) v + \frac{1}{2} \ln[Q(\mu, v)], \quad (8.14)$$

est le terme sous-dominant au sens où ses dérivées donnent les corrections MLLA. On définit

$$Q(\mu, v) = \frac{\sinh^3 \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}.$$

Maintenant on s'intéresse aux dérivées de (8.13) et (8.14) dont le résultat a été donné sans démonstration dans l'article. Par définition du point de col :

$$\bar{\phi}_\ell = \omega_0 = \gamma_0 e^\mu, \quad \bar{\phi}_y = \nu_0 = \gamma_0 e^{-\mu},$$

ceci peut être de même vérifié si l'on prend explicitement la dérivée de (8.13). Les expressions pour les dérivées sont en effet écrites en fonction de $\frac{\partial \mu}{\partial \ell}$, $\frac{\partial v}{\partial \ell}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ comme

$$\delta\psi_\ell \equiv \frac{\partial \delta\psi}{\partial \ell} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta} \right) \beta \gamma_0^2 + \mathcal{L}(\mu, v) \frac{\partial \mu}{\partial \ell} + \mathcal{K}(\mu, v) \frac{\partial v}{\partial \ell}, \quad (8.15)$$

$$\delta\psi_y \equiv \frac{\partial\delta\psi}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta}\right) \beta\gamma_0^2 + \mathcal{L}(\mu, v) \frac{\partial\mu}{\partial y} + \mathcal{K}(\mu, v) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (8.16)$$

où on a défini :

$$\mathcal{L}(\mu, v) = -\frac{a}{\beta} + L(\mu, v), \quad L(\mu, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln[Q(\mu, v)],$$

et

$$\mathcal{K}(\mu, v) = 1 + \frac{a}{\beta} + K(\mu, v), \quad K(\mu, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \ln[Q(\mu, v)].$$

Un calcul explicite permet de déterminer

$$L(\mu, v) = \frac{3 \cosh \mu}{2 \sinh \mu} - \frac{1}{2} \frac{(\mu - v) \cosh v \sinh \mu + \sinh v \sinh \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v},$$

et

$$K(\mu, v) = -\frac{1}{2} \sinh v \frac{(\mu - v) \cosh \mu - \sinh \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}.$$

À partir de (5.104b) on en déduit :

$$\frac{\partial v}{\partial \ell} = \frac{\sinh v}{\cosh v} \left(\frac{\cosh \mu}{\sinh \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \right)$$

qui permet de récrire (8.15)(8.16) sous la forme

$$\delta\psi_\ell = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta} + \tanh v \mathcal{K}(\mu, v)\right) \beta\gamma_0^2 + \left(\mathcal{L}(\mu, v) + \tanh v \coth \mu \mathcal{K}(\mu, v)\right) \frac{\partial \mu}{\partial \ell},$$

$$\delta\psi_y = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta} + \tanh v \mathcal{K}(\mu, v)\right) \beta\gamma_0^2 + \left(\mathcal{L}(\mu, v) + \tanh v \coth \mu \mathcal{K}(\mu, v)\right) \frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Un calcul explicite où on utilise (5.104a) donne

$$\frac{\partial \mu}{\partial \ell} = -\frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \left(\frac{2y + \lambda}{\ell + y + \lambda} + \frac{\sinh^3 v}{\sinh^2 \mu \cosh v} \right) Q(\mu, v) \cosh v, \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \left(\frac{2\ell + \lambda}{\ell + y + \lambda} - \frac{\sinh^3 v}{\sinh^2 \mu \cosh v} \right) Q(\mu, v) \cosh v. \quad (8.18)$$

On peut maintenant réexprimer (8.17) et (8.18) sous la forme

$$\frac{2y + \lambda}{\ell + y + \lambda} = 1 + \frac{y - \ell}{\ell + y + \lambda} = 1 + \frac{(\sinh 2\mu - 2\mu) - (\sinh 2v - 2v)}{2 \sinh^2 \mu},$$

$$\frac{2\ell + \lambda}{\ell + y + \lambda} = 1 - \frac{y - \ell}{\ell + y + \lambda} = 1 - \frac{(\sinh 2\mu - 2\mu) - (\sinh 2v - 2v)}{2 \sinh^2 \mu},$$

où on a utilisé (5.104a) ; on obtient ainsi

$$\frac{\partial \mu}{\partial \ell} = -\frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 g_+(\mu, v) Q(\mu, v) \cosh v, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 g_-(\mu, v) Q(\mu, v) \cosh v, \quad (8.19)$$

avec

$$g_+(\mu, v) = 1 + \frac{(\sinh 2\mu - 2\mu) - (\sinh 2v - 2v)}{2 \sinh^2 \mu} + \frac{\sinh^3 v}{\sinh^2 \mu \cosh v}$$

et

$$g_-(\mu, v) = 1 - \frac{(\sinh 2\mu - 2\mu) - (\sinh 2v - 2v)}{2 \sinh^2 \mu} - \frac{\sinh^3 v}{\sinh^2 \mu \cosh v}.$$

On développe les deux dernières expressions et on a respectivement

$$g_+(\mu, v) = \frac{\sinh \mu \cosh v (\sinh \mu + \cosh \mu) - (\mu - v) \cosh v - \sinh v}{\sinh^2 \mu \cosh v},$$

$$g_-(\mu, v) = \frac{\sinh \mu \cosh v (\sinh \mu - \cosh \mu) + (\mu - v) \cosh v + \sinh v}{\sinh^2 \mu \cosh v}$$

puis, un peu d'algèbre permet de les mettre sous la forme commode

$$g_+(\mu, v)Q(\mu, v) \cosh v = 1 + e^\mu \tilde{Q}(\mu, v), \quad g_-(\mu, v)Q(\mu, v) \cosh v = 1 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v)$$

avec

$$\tilde{Q}(\mu, v) = \frac{\cosh \mu \sinh \mu \cosh v - (\mu - v) \cosh v - \sinh v}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}.$$

. On peut donc réexprimer (8.17) et (8.18) sous la forme simple

$$\frac{\partial \mu}{\partial \ell} = -\frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \left[1 + e^\mu \tilde{Q}(\mu, v) \right], \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \left[1 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v) \right] \quad (8.20)$$

dont on donne l'allure des dérivées dans la Fig.35. Les expression MLLA pour les dérivées

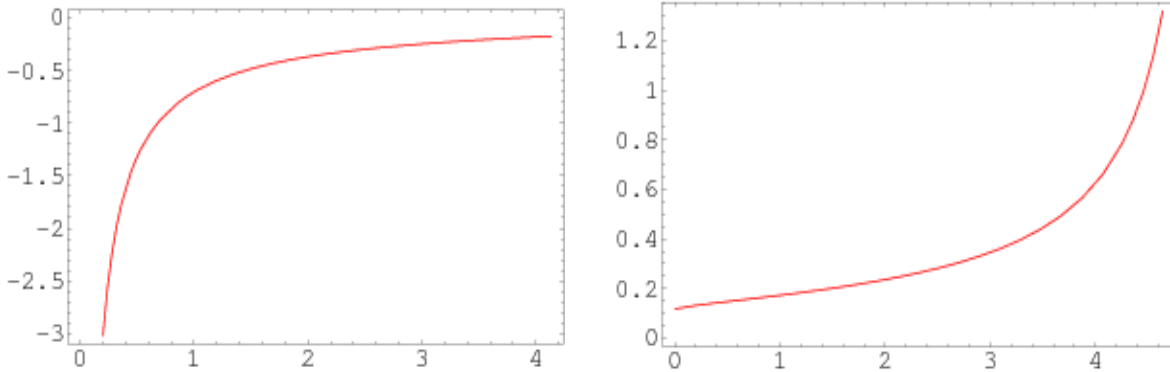


FIG. 35 – Dérivées $\frac{\partial \mu}{\partial \ell}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ pour $Y \approx 5.2$, $\lambda = 0$ en fonction de $\ln(1/x)$.

se simplifient aux expressions

$$\begin{aligned} \psi_\ell(\mu, v) = & \gamma_0 e^\mu + \frac{1}{2} a \gamma_0^2 \left[e^\mu \tilde{Q}(\mu, v) - \tanh v - \tanh v \coth \mu \left(1 + e^\mu \tilde{Q}(\mu, v) \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \left[1 + \tanh v \left(1 + K(\mu, v) \right) + C(\mu, v) \left(1 + e^\mu \tilde{Q}(\mu, v) \right) \right], \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} \psi_y(\mu, v) = & \gamma_0 e^{-\mu} - \frac{1}{2} a \gamma_0^2 \left[2 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v) + \tanh v - \tanh v \coth \mu \left(1 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v) \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \left[1 + \tanh v \left(1 + K(\mu, v) \right) - C(\mu, v) \left(1 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v) \right) \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

où nous avons défini

$$C(\mu, v) = L(\mu, v) + \tanh v \coth \mu \left(1 + K(\mu, v) \right).$$

En effet, bien que $L(\mu, v)$ diverge lorsque $\mu, v \rightarrow 0$, nous trouvons une complicité au sein de cette expression. C'est pour cette raison que nous l'avons ainsi définie. On a en effet

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} [L(\mu, v) + \tanh v \coth \mu K(\mu, v)] = \lim_{\mu, v \rightarrow 0} \frac{2 - 3\frac{v^2}{\mu^2} - \frac{v^3}{\mu^3}}{4\left(1 - \frac{v^3}{\mu^3}\right)} \mu = 0;$$

de même

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} \tanh v \coth \mu \left(1 + e^{\pm \mu} \tilde{Q}(\mu, v)\right) = \lim_{\mu, v \rightarrow 0} \frac{3\frac{v}{\mu}}{1 - \frac{v^3}{\mu^3}} = \frac{3\sqrt{\frac{\lambda}{Y+\lambda}}}{1 - \left(\frac{\lambda}{Y+\lambda}\right)^{3/2}}.$$

Nous avons alors démontré que (8.21) et (8.22), en plus d'être stables dans la limite $\lambda \rightarrow 0$, sont parfaitement régulières et peuvent être utilisées, par exemple, dans l'estimation des corrélations entre deux particules dans un jet.

8.4 Vérification des équations (5.68) et (8.7) par la solution du col

Nous allons simultanément vérifier que les équations d'évolution DLA (5.68) et MLLA (8.7) sont satisfaites par (5.108) et (8.10) respectivement. Nous mettons l'équation (8.7) sous la forme différentielle

$$G_{\ell y} = \gamma_0^2 (G - aG_\ell) + \mathcal{O}(\gamma_0^4 G)$$

que l'on peut récrire en fonction des dérivées logarithmiques

$$\psi_\ell \psi_y + \psi_{\ell y} = \gamma_0^2 (1 - a\psi_\ell) + \mathcal{O}(\gamma_0^4), \quad (8.23)$$

nous avons négligé les corrections next-to-MLLA (NMLLA) $\mathcal{O}(\gamma_0^4)$ (d'ordre relatif γ_0^2) qui découlent de la différentiation de la constante anormale γ_0^2 dans le terme sous-dominant $\propto a$. Nous devons par contre nous assurer que (8.23) est bien vérifiée en incluant les termes $\mathcal{O}(\gamma_0^3)$.

Dans les termes sous-dominants nous pouvons poser $\psi \rightarrow \phi$ (voir eqs.8.12 et 8.13) :

$$(\phi_\ell + \delta\psi_\ell)(\phi_y + \delta\psi_y) + \phi_{\ell y} = \gamma_0^2 (1 - a\phi_\ell). \quad (8.24)$$

On sélectionne les termes correctifs et on les met à droite de l'équation

$$a\gamma_0^2 \phi_\ell + [\phi_\ell \delta\psi_y + \phi_y \delta\psi_\ell] + \phi_{\ell y} = \gamma_0^2 - \phi_\ell \phi_y. \quad (8.25)$$

Puis, par définition du point de col

$$\phi_\ell = \omega_0 = \gamma_0 e^\mu, \quad \phi_y = \nu_0 = \gamma_0 e^{-\mu},$$

on en déduit que le membre droit de l'équation est nul et que l'on doit avoir

$$\omega_0 a \gamma_0^2 + [\omega_0 \delta\psi_y + \nu_0 \delta\psi_\ell] + \frac{d\omega_0}{dy} = 0, \quad (8.26)$$

ou de façon équivalente,

$$\omega_0 (a\gamma_0^2 + \delta\psi_y) + \nu_0 \delta\psi_\ell + \frac{d\omega_0}{dy} = 0. \quad (8.27)$$

On collecte d'abord les termes $\propto a$:

$$\begin{aligned} & a\gamma_0^3 \left[e^\mu - e^{-\mu} - \frac{1}{2}\tilde{Q} - \frac{1}{2}\tanh v e^\mu + \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu e^\mu + \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu \tilde{Q} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\tilde{Q} - \frac{1}{2}\tanh v e^{-\mu} - \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu e^{-\mu} - \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu \tilde{Q} \right] \\ & = a\gamma_0^3 [-\tanh v \cosh \mu + \tanh v \coth \mu \sinh \mu] \equiv 0 \end{aligned}$$

il reste alors de faire la même chose pour les termes $\propto \beta$

$$\frac{d\omega_0}{dy} = \frac{1}{2}\beta\gamma_0^3\tilde{Q},$$

$$\begin{aligned} & -\beta\gamma_0^3 \left[\frac{1}{2}e^\mu + \frac{1}{2}\tanh v(1+K)e^\mu - \frac{1}{2}C e^\mu - \frac{1}{2}C\tilde{Q} + \frac{1}{2}e^{-\mu} + \frac{1}{2}\tanh v(1+K)e^{-\mu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}C e^{-\mu} + \frac{1}{2}C\tilde{Q} \right] = -\beta\gamma_0^3 \left[\cosh \mu + \tanh v \cosh \mu(1+K) - C \sinh \mu - \frac{1}{2}\tilde{Q} \right] \end{aligned}$$

et on obtient

$$-\beta\gamma_0^3 \left[\cosh \mu - \sinh \mu L - \frac{1}{2}\tilde{Q} + \tanh v \cosh \mu(1+K) - \tanh v \cosh \mu(1+K) \right],$$

les deux derniers termes se simplifient. On construit maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mu, v) - 2 \cosh \mu &= -3 \cosh \mu + \sinh \mu \frac{(\mu - v) \cosh v \sinh \mu + \sinh v \sinh \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v} \\ &= -2 \sinh \mu L(\mu, v) \end{aligned}$$

et finalement

$$-\beta\gamma_0^3 \left[\cosh \mu - \sinh \mu L - \frac{1}{2}\tilde{Q} \right] \equiv 0.$$

On a ainsi simultanément vérifié que nos solutions DLA (5.109) ($a = 0, \beta$) et MLLA (8.10) ($a \neq 0, \beta$) trouvées à partir de la méthode du col satisfont l'équation d'évolution dans l'approximation où on néglige les puissance de γ_0 supérieure à 3, $\mathcal{O}(\gamma_0^4)$.

8.4.1 Application au cas des corrélations entre deux particules

Nous donnons le calcul détaillé de la fonction Δ' (voir eq.(37) de C.3) près du maximum de la distribution inclusive. Nous avons

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} C(\mu, v) = \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{1/2}, \quad \lim_{\mu, v \rightarrow 0} K_i = \frac{3}{2} \frac{v_i^2}{\mu_i^3 - v_i^3};$$

on ne garde que les termes linéaires en μ

$$\begin{aligned} \Delta' \quad_{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2} & \simeq -a\gamma_0 \left[2 + \mu_1 + \mu_2 + \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2) - \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2) \right] \\ & -\beta\gamma_0 \left[2 - \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2) + \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2) + 3 \frac{\left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{3/2}}{1 - \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \Delta'_{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2} &= -a\gamma_0 [2 + \mu_1 + \mu_2] - \beta\gamma_0 \left[2 + 3 \frac{\left(\frac{\lambda}{Y+\lambda}\right)^{3/2}}{1 - \left(\frac{\lambda}{Y+\lambda}\right)^{3/2}} \right] \\ &= -a\gamma_0 [2 + \mu_1 + \mu_2] - \beta\gamma_0 \left[2 + 3 \frac{\lambda^{3/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Nous avons en effet négligé les termes quadratiques.

8.4.2 Résultats de la méthode du col

Cette méthode nous a donc permis de donner l'expression analytique du spectre et ainsi, celles des corrélations, étendues au cas $Q_0 \neq \Lambda_{QCD}$. Nous avons de même généralisé l'approche des corrélations proposée par Fong et Webber au cas général $\lambda \neq 0$. La limite $\lambda = 0$ nous a permis de vérifier la compatibilité de nos calculs avec ceux qui les ont précédés [9][12].

8.4.3 Résultats de C.3 pour les corrélations,

$\lambda = 0$

Dans la Fig.36, nous donnons nos prédictions pour les corrélations R (8.29) à partir de la méthode du col (pour $\lambda = 0$); on les compare avec les résultats de Fong-Webber et les données expérimentales du LEP-I au pic du Z^0 , $Y = 5.2$ ($E\Theta = 91.2$ GeV). Pour deux jets de quark, nous donnons l'expression des corrélations

$$R = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_q \quad (8.29)$$

où \mathcal{C}_q est la fonction de corrélation entre deux particules dans un jet de quark; elle a été calculée dans C.3. Le résultat de la comparaison donnée par cette figure est très similaire à celui de l'article C.2. Donc, si les résultats numériques sont très similaires, cette façon d'estimer les corrélations s'avère beaucoup plus économique et rapide que celle de l'article C.2.

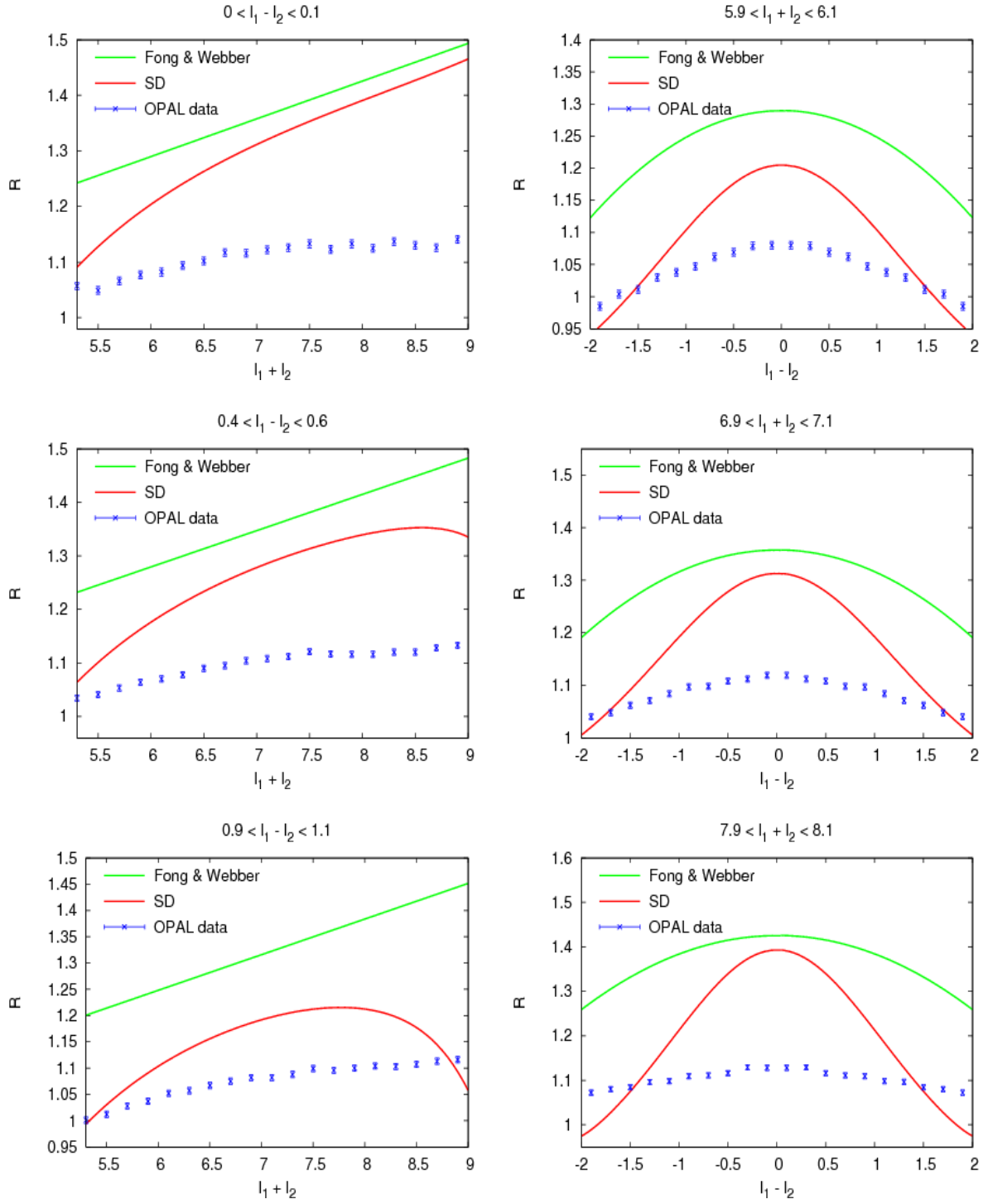


FIG. 36 – Corrélation R entre 2 particules produites dans $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, comparée avec les données de OPAL et avec l'approximation de Fong & Webber ($\lambda = 0$)

9 Conclusions

Après avoir donné les explications de base qui facilitent la compréhension des trois articles C.1, C.2 et C.3, nous concluons l'ensemble de ce travail.

Dans l'article C.1, j'ai obtenu l'expression de la section efficace inclusive doublement différentielle valable pour toute valeur de la fraction d'énergie x de la particule observée. La solution exacte (pour $Q_0 = \Lambda_{QCD}$) des équations d'évolution MLLA a été utilisée pour calculer analytiquement cette observable ainsi que la section efficace inclusive différentielle dans la limite des petits x . Les résultats obtenus montrent de grandes différences avec ceux obtenus dans la cas ("naïf") où l'on ne considère pas l'évolution du jet entre son angle d'ouverture initiale Θ_0 et l'angle d'émission de la particule détectée. En particulier, la positivité de la distribution est restaurée dans l'intervalle de validité de l'approximation utilisée. Cette évolution est l'origine physique des corrections MLLA, que l'on ne rencontre pas dans le cas DLA, elles croissent en fonction de x et décroissent lorsque l'impulsion transverse du hadron sortant croît.

Pour que l'approximation des petits x reste valable, sa valeur minimale a été obtenue à partir de l'analyse des corrections, au seuil d'énergie des présents accélérateurs : $x \leq x_{max} \approx 0.08$ ($\ell \geq \ell_{min} \approx 2.5$) qui est en remarquable accord avec celle obtenue dans le cas des corrélations (voir C.2). À $Y_{\Theta_0} = \ln(Q/Q_0)$ fixé, la borne inférieure sur ℓ est remplacée par une borne supérieure sur y ou k_{\perp} , soit $y \leq y_{max} \approx Y_{\Theta_0} - \ell_{min}$. Ainsi, l'approximation sera valable dans le domaine des petits k_{\perp} .

D'un autre côté, pour garantir la convergence de la série perturbative, la constante de couplage ne doit pas devenir supérieure à 1. La valeur minimale de y a ainsi été fixée à 1, ce qui correspond à $y \geq y_{min} \approx 1$, soit $k_{\perp min} \gtrsim 0.8$ GeV.

Ceci a été ainsi confirmé par l'analyse (voir Fig.32) de CDF. L'accord est excellent avec nos prédictions dans l'intervalle de validité mentionné, tandis que plus de particules que la nature en produit sont prédites à grand k_{\perp} . La distribution de gluons mous obtenue a été multipliée par $K^{ch} \approx 0.56$, ce qui l'a ainsi adaptée à la distribution observée des particules chargées, qui ne représentent que 60% du nombre total des particules produites. Une fois de plus, l'hypothèse "LPHD" n'est pas remise en question dans ce cas d'une variable inclusive. La cohérence des gluons mous se trouve parmi les phénomènes les plus régulièrement mentionnés à propos des observables inclusives des jets. Dans le cas des distributions inclusives qui ont été calculées en fonction de l'impulsion transverse (k_{\perp}) (article C.1), elle est écartée par la divergence de la constante de couplage à petit k_{\perp} . Par conséquent, la forme des distributions MLLA est différente de celle obtenue en DLA, où l'on ne considère pas la variation de α_s . C'est aussi pour cela que, en augmentant l'énergie totale du jet (α_s diminue alors), l'apparition d'un maximum dans la distribution a été montrée, suivie d'une décroissance à petit k_{\perp} associée, elle, à l'interférence des gluons mous dans cette région de l'espace de phase.

Pour améliorer ces prédictions en CDQ perturbative, un calcul exact de la distribution (3.11) dans C.1, ainsi que son extension au delà du "limiting spectrum" sont nécessaires. Ceci permettra d'étendre l'intervalle de validité de notre approximation ainsi que de prédire la forme de la distribution à petit k_{\perp} .

Dans l'article C.2 j'ai calculé les corrélations entre deux particules dans un jet. Pour la première fois, la démonstration permettant d'obtenir les équations d'évolution MLLA aussi bien dans le cas du spectre que dans celui des corrélations a été donnée. Ont été pris en considération : la contrainte angulaire dans l'émission des gluons mous (*Angular Ordering*) et la conservation de l'énergie et les effets associés à l'évolution de la constante de couplage. Les équations d'évolution MLLA des corrélations ont été résolues de façon itérative. Ceci

a permis, en particulier, de généraliser les résultats de Fong & Webber [12], qui n'étaient valables qu'au voisinage du maximum de la distribution inclusive des partons. L'intervalle (qui doit donc être exclus) dans lequel les corrélations deviennent négatives ($\mathcal{C} - 1 < 0$) a été donné ; ceci a lieu quand l'énergie de l'un des partons devient très supérieure à l'énergie de l'autre, autrement dit, quand l'espace de phase de la particule la plus molle est réduit. En même temps, les corrélations s'annulent ($\mathcal{C} \rightarrow 1$) lorsque l'un des partons devient très mou ($\ell \equiv \ln(1/x) \rightarrow Y = \ln E\Theta/Q_0$). Ceci s'explique de façon analogue à ce qui se passe dans le cas des distributions inclusives à petit k_\perp , à savoir, à partir de la cohérence des gluons mous. Du point de vue qualitatif, les prédictions obtenues sont en meilleur accord avec les données du LEP-I qu'avec celles de Fong & Webber [12]. Cependant, il y reste encore une différence notoire, d'autant plus marquée à petit x . Dans cette région, les effets non-perturbatifs pourraient se faire sentir de façon non négligeable, et limiter l'application de l'hypothèse "LPHD" au cas de cette observable moins inclusive que les distributions étudiées dans C.1. Les données expérimentales de CDF (à venir) seront comparées aux résultats de ce travail, et pourront éclairer cette question.

Dans l'article C.3 je me suis intéressé à l'évaluation du spectre inclusif d'une particule par la méthode du col. Je me suis inspiré des travaux de Dokshitzer, Fadin, Khoze et Troyan [9][23] en DLA (*Leading Order*) et je les ai généralisés au cas MLLA (*Next-to-Leading Order*). Ceci m'a permis de donner, en particulier, l'expression asymptotique du spectre à $\lambda \neq 0$ ($Q_0 \neq \Lambda_{QCD}$) en MLLA, et de retrouver à $\lambda = 0$ la position de son maximum ainsi que sa forme gaussienne au voisinage de ce point. Les dérivées logarithmiques, importantes pour le calcul postérieur des corrélations, étant finies dans la limite $\lambda \rightarrow 0$, peuvent être comparées avec leur expression exacte (voir D.2 dans C.2). Bien que cette méthode (approchée) n'est valable que, strictement parlé, dans la limite asymptotique $Y + \lambda, \lambda \gg 1$, l'accord obtenu entre cette méthode et l'expression exacte du travail précédent est remarquable, même à l'échelle d'énergie du LEP-I ($Q = 91.2$ GeV). C'est pour cela que je l'ai utilisée pour évaluer les corrélations d'une façon plus rapide et économique. Elle a permis, en outre, de faire des prédictions pour celles ci à $\lambda \neq 0$, ce qui était irréalisable avec la méthode exacte précédente, pour des raisons techniques. J'ai ainsi pu démontrer que, si l'on augmente Q_0 , on réduit l'espace de phase disponible pour les gluons mous et les corrélations augmentent. Ceci a permis, en particulier, de confirmer quantitativement que le "limiting spectrum" reste le meilleur candidat pour la description des données expérimentales, celles ci demeurant pour le moment au dessus des prédictions.

S'il s'avère que les données expérimentales à venir laissent subsister un désaccord avec nos prédictions théoriques MLLA, des calculs NMLLA seraient à envisager, conjointement avec des interrogations sur la validité de l'hypothèse LPHD.

Enfin, une continuation naturelle des mêmes techniques présentées dans cette thèse concerne le problème "KNO" [9][6] (Koba, Nielsen, Olesen) sur la loi de "scaling" des fluctuations des multiplicités dans les jets. Jusqu'à présent, aucun calcul théorique n'a été à même de tenir compte de l'évolution du jet, c'est à dire des effets de variation de α_s , ni des "corrections fortes" qui apparaissent lorsque l'on satisfait le principe de conservation de l'énergie.

APPENDICES

A Rayonnement en électrodynamique classique et en chromodynamique quantique

A.1 Calcul concernant 4.3.2

On pose :

$$\begin{aligned} e^{a_0\tau'} &= \sinh a_0\tau' + \cosh a_0\tau' \\ e^{-a_0\tau'} &= \cosh a_0\tau' - \sinh a_0\tau', \end{aligned}$$

et on récrit

$$\begin{aligned} &\left[\cosh y + \frac{1}{2} (v_1 - v_2) \sinh y \right] \sinh a_0\tau' - \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \sinh y \cosh a_0\tau' \\ &= A \sinh a_0\tau' + B \cosh a_0\tau' = D \sinh (a_0\tau' + \chi), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{\cosh (\eta_2 - y) \cosh (\eta_1 - y)}{\cosh \eta_2 \cosh \eta_1} = \frac{v_1 + v_2}{\tanh (\eta_2 - y) - \tanh (\eta_1 - y)} \\ \chi &= \tanh^{-1} \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1 - 2 \coth y}. \end{aligned}$$

On décompose l'intégrand de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{2} (v_2 - v_1) \cosh y - \sinh y \right] \cosh a_0\tau' + \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \cosh y \sinh a_0\tau' = \\ &\tilde{A} \left\{ \left[\cosh y + \frac{1}{2} (v_1 - v_2) \sinh y \right] \sinh a_0\tau' - \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \sinh y \cosh a_0\tau' \right\} + \\ &\frac{\tilde{B}}{a_0} \frac{d}{d\tau'} \left\{ \left[\cosh y + \frac{1}{2} (v_1 - v_2) \sinh y \right] \sinh a_0\tau' - \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \sinh y \cosh a_0\tau' \right\}. \end{aligned}$$

Ici :

$$\tilde{A} = \frac{v_1 + v_2}{D^2} = \tanh (\eta_2 - y) - \tanh (\eta_1 - y).$$

L'intégrale $\propto \tilde{B}$ s'annule, celle qui est proportionnelle à \tilde{A} se calcule à partir de la représentation intégrale de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.

A.2 Calculs concernant 4.6 (Angular Ordering)

* On intègre (4.50) sur les angles d'émission pour trouver la probabilité totale indépendante de rayonnement :

$$< \mathcal{R}_1 > \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v_1^2 \sin^2 \Theta}{(1 - v_1 \cos \Theta)^2} = \int_0^\pi \frac{v_1^2 \sin^3 \Theta d\Theta}{(1 - v_1 \cos \Theta)^2} \int_0^{2\pi} d\phi = \mathcal{I}(v_1) \quad (\text{A.1})$$

qui peut s'intégrer facilement en effectuant le changement de variables suivant

$$u = \cos \Theta, \quad du = -\sin \Theta d\Theta.$$

On doit résoudre

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(v_1) &= \frac{v_1^2}{2} \left(\int_{-1}^1 \frac{du}{(1-v_1u)^2} - \int_{-1}^1 \frac{u^2 du}{(1-v_1u)^2} \right) = \frac{1}{v_1} \ln \frac{1+v_1}{1-v_1} - 2 \\ &= 2 \left(\frac{\eta}{\tanh \eta} - 1 \right); \quad \text{avec } v = \tanh \eta.\end{aligned}$$

La deuxième intégrale dans l'expression précédente se décompose en

$$\int_{-1}^1 \frac{u^2 du}{(1-v_1u)^2} = \frac{1}{v_1^2} \left(2 + \int_{-1}^1 \frac{du}{(1-v_1u)^2} - 2 \int_{-1}^1 \frac{du}{(1-v_1u)} \right).$$

η a le sens d'un "angle hyperbolique" en fonction duquel on peut exprimer la quadri-impulsion de l'électron

$$E_1 = m_1 \cosh \eta, \quad |\vec{p}_1| = m_1 \sinh \eta.$$

* On peut vérifier l'invariance de Lorentz de la probabilité totale d'émission (4.49)

$$\{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2\mathcal{J}\} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega = [-j_\mu^2] \frac{d^3k}{\omega}$$

$$\text{où } \frac{d^3k}{\omega} = 2 \int d^4k \delta^4(k^2).$$

* On calcule l'intégrale suivante dans la limite ultra-relativiste :

$$\lim_{v_1, v_2 \rightarrow 1} \langle \mathcal{J} \rangle = \int \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - (\vec{n} \vec{n}_1)(\vec{n} \vec{n}_2)}{(1 - \vec{n} \vec{n}_1)(1 - \vec{n} \vec{n}_2)}. \quad (\text{A.2})$$

$$(A.2) = \int_{-1}^1 \frac{d \cos \Theta_1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - (\vec{n} \vec{n}_1)(\vec{n} \vec{n}_2)}{(1 - \vec{n} \vec{n}_1)(1 - \vec{n} \vec{n}_2)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \langle \mathcal{J} \rangle_\phi \quad (\text{avec } x = \cos \Theta_1).$$

On effectue les décompositions

$$\begin{aligned}\frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - (\vec{n} \vec{n}_1)(\vec{n} \vec{n}_2)}{(1 - \vec{n} \vec{n}_1)(1 - \vec{n} \vec{n}_2)} &= \frac{\vec{n} \vec{n}_1}{1 - \vec{n} \vec{n}_1} + \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - \vec{n} \vec{n}_1}{1 - \vec{n} \vec{n}_1} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{n}_2} \\ &= \frac{x}{1 - x} + \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x}{1 - x} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{n}_2},\end{aligned}$$

$$\vec{n} \vec{n}_2 = \cos \Theta_2 = \vec{n}_z \cdot \vec{n}_{2z} + \vec{n}^\perp \cdot \vec{n}_2^\perp = \cos \Theta_1 \cos \Theta_{12} + \sin \Theta_1 \sin \Theta_{12} \cos \phi.$$

Or

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J} \rangle_\phi &= \frac{x}{1 - x} + \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x}{1 - x} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + b \cos \phi} \\ &= \frac{1}{1 - x} \left\{ 1 + (\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{\vec{n}, \vec{n}_1}}{2\pi} \frac{1}{a_2} \right\} - 1,\end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où $a = 1 - \cos \Theta_1 \cos \Theta_{12}$ et $b = 1 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_{12}$. L'intégrale peut se calculer facilement

$$\begin{aligned}
(4.58) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{\vec{n}, \vec{n}_1}}{2\pi} \frac{1}{a_2} \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + b \cos \phi} = \left[\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{\phi}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{|\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x|} \equiv \frac{1}{|a_{12} - a_1|} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

de sorte que l'évaluation entraîne

$$< \mathcal{J} >_{\phi} = \frac{1}{1-x} \left\{ 1 + \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x}{|\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x|} \right\} - 1.$$

En introduisant la fonction de Heaviside

$$\vartheta(\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x}{|\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x|} \right\},$$

on récrit

$$< \mathcal{J} >_{\phi} = 2 \frac{\vartheta(\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x)}{1-x} - 1$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\lim_{v_1, v_2 \rightarrow 1} < \mathcal{J} > &= \int_{-1}^1 dx \left[\frac{\vartheta(\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x)}{1-x} - 1/2 \right] = \int_{-1}^{\vec{n}_1 \vec{n}_2} \frac{dx}{1-x} - 1 \\
&= \ln \frac{2}{1 - \vec{n}_1 \vec{n}_2} - 1. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Puis on s'intéresse à la quantité $< V_1 >_{\text{azimuth}} = < (\mathcal{R}_1 - \mathcal{J}) >^{17}$:

$$\begin{aligned}
< V_1 >_{\text{azimuth}} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{\vec{n}, \vec{n}_1}}{2\pi} V_1(\vec{n}, \vec{n}_1; \vec{n}_2) = 2 \frac{1 - \vartheta(\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x)}{1-x} \equiv \frac{2}{a_1} \vartheta(a_{12} - a_1), \\
< V_2 >_{\text{azimuth}} &= \frac{2}{a_2} \vartheta(a_{12} - a_2).
\end{aligned}$$

A.3 Production du boson de Higgs

Soient $p_1 = E(1, \vec{u})$, $p_2 = E(1, -\vec{u})$ les quadri-impulsions des quarks entrants, $p'_1 = E(1, \vec{v})$, $p'_2 = E(1, -\vec{v})$ celles des quarks sortants définies dans le centre de masse. On définit $\Theta_d = \frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{v})$.

Les variables de Mandelstam s'écrivent

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 = 4E^2,$$

$$t = (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 = -2p_1 \cdot p'_1 = -2E^2(1 - \vec{v} \cdot \vec{u}) \approx -4E^2\Theta_d^2 \quad \text{pour } \Theta_d \text{ petit},$$

d'où

$$\Theta_d^2 \approx \frac{|t|}{s} \approx \frac{M_H^2}{s}.$$

¹⁷ $\vartheta(\vec{n}_1 \vec{n}_2 - x) = \vartheta[1 - x - (1 - \vec{n}_1 \vec{n}_2)] = \vartheta(a_1 - a_{12})$, puis $1 - \vartheta(a_1 - a_{12}) = \vartheta(a_{12} - a_1)$

B Compléments utiles pour le chapitre 5

B.1 Dérivées secondes $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu}$ et expression du déterminant $Det A$ en fonction de ω, ν

L'astuce pour calculer ces dérivées secondes à partir de (5.99a) et (5.99b) consiste à les récrire sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \omega} &= \frac{2\omega - \nu}{\omega - \nu} \ell + \frac{\nu}{\omega - \nu} - \frac{\phi}{\omega - \nu} - \lambda \frac{\nu + 2s_0}{\omega - \nu} + \frac{1}{\beta \omega (\omega - \nu)}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= \frac{\omega - 2\nu}{\omega - \nu} y - \frac{\omega}{\omega - \nu} + \frac{\phi}{\omega - \nu} + \lambda \frac{\omega + 2s_0}{\omega - \nu} - \frac{1}{\beta \nu (\omega - \nu)},\end{aligned}$$

les expressions des dérivées secondes sont données par

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} &= -\frac{\nu}{(\omega - \nu)^2} (\ell + y + \lambda) + \frac{\phi}{(\omega - \nu)^2} - \frac{2\omega - \nu}{\beta \omega^2 (\omega - \nu)^2} \\ &+ \frac{4}{\beta (\omega - \nu)^2 (2s_0 + \omega + \nu)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} &= -\frac{\omega}{(\omega - \nu)^2} (\ell + y + \lambda) + \frac{\phi}{(\omega - \nu)^2} + \frac{\omega - 2\nu}{\beta \nu^2 (\omega - \nu)^2} \\ &+ \frac{4}{\beta (\omega - \nu)^2 (2s_0 + \omega + \nu)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu} &= \frac{\omega}{(\omega - \nu)^2} (\ell + y + \lambda) - \frac{\phi}{(\omega - \nu)^2} + \frac{1}{\beta \omega (\omega - \nu)^2} \\ &- \frac{4}{\beta (\omega - \nu)^2 (2s_0 + \omega + \nu)}.\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu \partial \omega} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Finalement l'expression pour le déterminant est

$$Det A = (\ell + y + \lambda)^2 \left[\frac{\beta (\omega + \nu) \phi - 4}{(\omega - \nu)^2} + \frac{4(\omega + \nu)}{(\omega - \nu)^2 (2s_0 + \omega + \nu)} \right].$$

Nous utilisons de même le résultat de l'intégration gaussienne suivante

$$\int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-\frac{1}{2} x^T A x} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{(\det A)^{1/2}}.$$

B.2 Astuce pour la méthode du col

On veut estimer l'intégrale suivante par la méthode du col :

$$I = \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi)^2} e^{\Phi(\omega, \nu)} \quad (\text{B.2})$$

où $\Phi(\omega, \nu) = \phi(\omega, \nu) + \phi'(\omega, \nu)$. La fonction $\phi'(\omega, \nu)$ représente une correction face à la fonction dominante ϕ , soit $\phi \gg \phi'$. Soit (ω_0, ν_0) le point de col dans l'exponentielle de l'intégrale dominante

$$I_0 = \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi)^2} e^{\phi(\omega, \nu)},$$

tel que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega}(\omega_0, \nu_0) = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(\omega_0, \nu_0) = 0.$$

L'estimation de l'intégrale I_0 au voisinage de (ω_0, ν_0) est donnée par l'expression suivante

$$I_0 \approx \frac{e^{\phi(\omega_0, \nu_0)}}{2\pi \sqrt{\text{Det} A(\omega_0, \nu_0)}}.$$

Finalement, on remplace le point de col (ω_0, ν_0) dans le terme sous-dominant de (B.2) pour obtenir

$$I \approx \frac{e^{\phi(\omega_0, \nu_0) + \phi'(\omega_0, \nu_0)}}{2\pi \sqrt{\text{Det} A(\omega_0, \nu_0)}}.$$

C Articles

C.1 Inclusive hadronic distributions inside one jet at high energy colliders at “Modified Leading Logarithmic Approximation” of Quantum Chromodynamics

Inclusive hadronic distributions inside one jet at high energy colliders at “modified leading logarithmic approximation” of quantum chromodynamics

Redamy Perez-Ramos and Bruno Machet

*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies**

Unité Mixte de Recherche UMR 7589

Université Pierre et Marie Curie-Paris6; CNRS;

Université Denis Diderot-Paris7

Paris, France

E-mail: perez@lpthe.jussieu.fr, machet@lpthe.jussieu.fr

ABSTRACT: After demonstrating their general expressions valid at all x , double differential 1-particle inclusive distributions inside a quark and a gluon jet produced in a hard process, together with the inclusive k_{\perp} distributions, are calculated at small x in the Modified Leading Logarithmic Approximation (MLLA), as functions of the transverse momentum k_{\perp} of the outgoing hadron. Results are compared with the Double Logarithmic Approximation (DLA) and a naive DLA-inspired evaluation; sizable corrections are exhibited, which, associated with the requirement to stay in a perturbative regime, set the limits of the interval where our calculations can be trusted. We give predictions for the LHC and Tevatron colliders.

KEYWORDS: Jets, QCD.

*LPTHE, tour 24-25, 5^{ème} étage, Université P. et M. Curie, BP 126, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 (France)

Contents

1. Introduction	2
2. The process under consideration	4
2.1 Notations and variables	5
2.2 The jet axis	6
3. Double differential 1-particle inclusive distribution $\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta}$	6
4. Soft approximation (small-x_1) for $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$	8
4.1 The average color current $\langle C \rangle_{A_0}$	11
4.2 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ at small x_1 : gluon jet	13
4.3 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ at small x_1 : quark jet	14
4.4 Comments	15
5. Inclusive k_\perp distribution $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$	15
5.1 Gluon jet; $\ell_{\min} = 0$	16
5.2 Quark jet; $\ell_{\min} = 0$	16
5.3 Role of the lower limit of integration ℓ_{\min}	17
5.4 Discussion	17
5.4.1 Mixed quark and gluon jets	18
6. Conclusion	18
A. Exact solution of the MLLA evolution equation for the fragmentation functions; the spectrum and its derivatives	19
A.1 MLLA evolution equation for a gluon jet	19
A.2 Exact solution of the MLLA evolution equation for particle spectra	20
A.3 The spectrum	21
A.4 Derivatives of the spectrum	22
B. Leading contributions to $x_1 F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0)$ at small x_1	23
C. Calculation of $\delta \langle C \rangle_g$ and $\delta \langle C \rangle_q$ of section 4	25
C.1 Explicit expressions for $\langle u \rangle_{A_0}^A$ and $\delta \langle u \rangle_{A_0}^A$ defined in (4.8)	25
C.2 $\delta \langle C \rangle_q$ and $\delta \langle C \rangle_g$	27
D. At LEP and Tevatron	27
D.1 The average color current	27
D.2 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ for a gluon jet	28
D.3 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ for a quark jet	28

D.4	$\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ for a gluon jet	28
D.5	$\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ for a quark jet	29
D.6	Discussion and predictions for the Tevatron	30
E.	Comparing DLA and MLLA approximations	30
E.1	The spectrum	30
E.2	Double differential 1-particle inclusive distribution	31
E.3	Inclusive k_\perp distribution	31

1. Introduction

In high energy collisions, perturbative Quantum Chromodynamics (pQCD) successfully predicts inclusive energy spectra of particles in jets. They have been determined within the Modified Leading Logarithmic Approximation (MLLA) [1, 2] as functions of the logarithm of the energy ($\ln(1/x)$) and the result is in nice agreement with the data of — e^+e^- and hadronic — colliders and of deep inelastic scattering (DIS) (see for example [3–5]). Though theoretical predictions have been derived for small x (energy fraction of one parton inside the jet, $x \ll 1$),¹ the agreement turns out to hold even for $x \sim 1$. The shape of the inclusive spectrum can even be successfully described by setting the infrared transverse momentum cutoff Q_0 as low as the intrinsic QCD scale Λ_{QCD} (this is the so-called “limiting spectrum”).

This work concerns the production of two hadrons inside a high energy jet (quark or gluon); they hadronize out of two partons at the end of a cascading process that we calculate in pQCD; considering this transition as a “soft” process is the essence of the “Local Parton Hadron Duality” (LPHD) hypothesis [1, 6, 7], that experimental data have, up to now, not put in jeopardy.

More specifically, we study, in the MLLA scheme of resummation, the double differential inclusive 1-particle distribution and the inclusive k_\perp distribution as functions of the transverse momentum of the emitted hadrons; they have up to now only been investigated in DLA (Double Logarithmic Approximation) [1]. After giving general expressions valid at all x , we are concerned in the rest of the paper with the small x region (the range of which is extensively discussed) where explicit analytical formulæ can be obtained; we furthermore consider the limit $Q_0 \approx \Lambda_{\text{QCD}}$, which leads to tractable results. We deal with jets of small aperture; as far as hadronic colliders are concerned, this has in particular the advantage to avoid interferences between ingoing and outgoing states.

The paper is organized as follows:

- The description of the process, the notations and conventions are presented in section 2. We set there the general formula of the inclusive 2-particle differential cross section for the production of two hadrons h_1 and h_2 at angle Θ within a jet of opening angle Θ_0 , carrying respectively the fractions x_1 and x_2 of the jet energy E ; the axis of the jet is identified with the direction of the energy flow.

¹As the exact solution of the MLLA evolution equations

- In section 3, we determine the double differential inclusive 1-particle distribution $\frac{d^2 N}{d \ln(1/x_1) d \ln \Theta}$ for the hadron h_1 emitted with the energy fraction x_1 of the jet energy E , at an angle Θ with respect to the jet axis. This expression is valid for all x ; it however only simplifies for $x \ll 1$, where an analytical expression can be obtained; this concerns the rest of the paper.
- In section 4, we go to the small x region and determine $\frac{d^2 N}{d \ln(1/x_1) d \ln \Theta}$, $x_1 \ll 1$ both for a gluon jet and for a quark jet. It is plotted as a function of $\ln k_\perp$ (or $\ln \Theta$) for different values of $\ell_1 = \ln(1/x_1)$; the role of the opening angle Θ_0 of the jet is also considered; we compare in particular the MLLA calculation with a naive approach, inspired by DLA calculations, in which furthermore the evolution of the starting jet from Θ_0 , its initial aperture, to the angle Θ between the two outgoing hadrons is not taken into account.

The MLLA expressions of the average gluon and quark color currents $\langle C \rangle_g$ and $\langle C \rangle_q$ involve potentially large corrections with respect to their expressions at leading order; the larger the (small) x domain extends, the larger they are; keeping then under control sets the bound $\ell \equiv \ln \frac{1}{x} \geq 2.5$.

- In section 5, we study the inclusive k_\perp distribution $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$, which is the integral of $\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta}$ with respect to x_1 ; It is shown in particular how MLLA corrections ensure its positivity. The domain of validity of our predictions is discussed; it is a k_\perp interval, limited by the necessity of staying in the perturbative regime and the range of applicability of our small x approximation; it increases with the jet hardness. The case of mixed gluon and quark jets is evoked.
- A conclusion briefly summarizes the results of this work and comments on its extensions under preparation.

Five appendices complete this work;

- Appendix A is dedicated to the MLLA evolution equation for the partonic fragmentation functions $D_g^{g \text{ or } q}$ and their exact solutions [8, 9]. They are plotted, together with their derivatives with respect to $\ln(1/x)$ and $\ln k_\perp$. This eases the understanding of the figures in the core of the paper and shows the consistency of our calculations.
- Appendix B presents the explicit expressions at leading order for the average color currents of partons $\langle C \rangle_{A_0}$.
- Appendix C completes section 4 and appendix B by providing explicit formulæ necessary to evaluate the MLLA corrections $\delta \langle C \rangle_{A_0}$ to the average color currents;
- While the core of the paper mainly give results for LHC, appendix D provides an overview at LEP and Tevatron energies. It is shown how, considering too large values of x ($\ln \frac{1}{x} < 2$) endanger the positivity of $\frac{d^2 N}{d \ell d \ln k_\perp}$ at low k_\perp . Curves are also given for $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$; the range of applicability of our approximation is discussed in relation with the core of the paper.

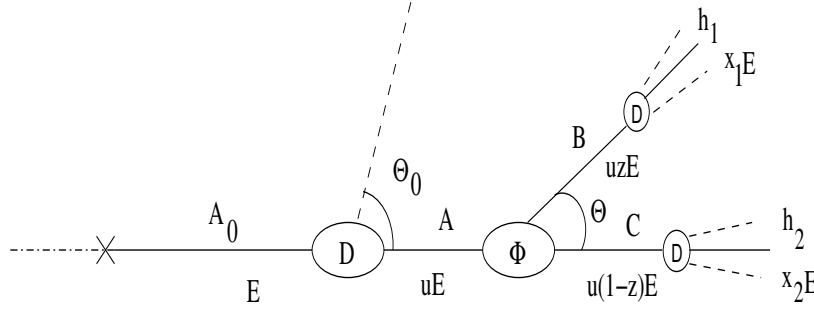


Figure 1: Process under consideration: two hadrons h_1 and h_2 inside one jet.

- In appendix E, we compare the DLA and MLLA approximations for the spectrum, the double differential 1-particle inclusive distribution, and the inclusive k_\perp distribution.

2. The process under consideration

It is depicted in figure 1. In a hard collision, a parton A_0 is produced, which can be a quark or a gluon.² A_0 , by a succession of partonic emissions (quarks, gluons), produces a jet of opening angle Θ_0 , which, in particular, contains the parton A ; A splits into B and C , which hadronize respectively into the two hadrons h_1 and h_2 (and other hadrons). Θ is the angle between B and C .

Because the virtualities of B and C are much smaller than that of A [10], Θ can be considered to be close to the angle between h_1 and h_2 [10, 11]; angular ordering is also a necessary condition for this property to hold.

A_0 carries the energy E . With a probability $D_{A_0}^A$, it gives rise to the (virtual) parton A , which carries the fraction u of the energy E ; $\Phi_A^{BC}(z)$ is the splitting function of A into B and C , carrying respectively the fractions uz and $u(1-z)$ of E ; h_1 carries the fraction x_1 of E ; h_2 carries the fraction x_2 of E ; $D_B^{h_1}(\frac{x_1}{uz}, uzE\Theta, Q_0)$ and $D_C^{h_2}(\frac{x_2}{u(1-z)}, u(1-z)E\Theta, Q_0)$ are their respective energy distributions.

One has $\Theta \leq \Theta_0$. On the other hand, since $k_\perp \geq Q_0$ (Q_0 is the collinear cutoff), the emission angle must satisfy $\Theta \geq \Theta_{\min} = Q_0/(xE)$, x being the fraction of the energy E carried away by this particle (see also subsection 2.1 below).

The following expression for the inclusive double differential 2-particle cross section has been demonstrated in [10, 11]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{jet}} dx_1 dx_2 d\ln(\sin^2 \frac{\Theta}{2}) \frac{d\varphi}{2\pi}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{jet}}} \right)_0 \sum_{A,B,C} \int \frac{du}{u^2} \int dz \left[\frac{1}{z(1-z)} \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{4\pi} \Phi_A^{BC}(z) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) D_B^{h_1}\left(\frac{x_1}{uz}, uzE\Theta, Q_0\right) \right]$$

²In $p-p$ or $p-\bar{p}$ collisions, two partons collide which can create A_0 either as a quark or as a gluon; in the deep inelastic scattering (DIS) and in e^+e^- colliders, a vector boson (γ or Z) decays into a quark-antiquark pair, and A_0 is a quark (or an antiquark).

$$D_C^{h_2} \left(\frac{x_2}{u(1-z)}, u(1-z)E\Theta, Q_0 \right) \Bigg], \quad (2.1)$$

where $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{jet}}}\right)_0$ is the Born cross section for the production of A_0 , Ω_{jet} is the solid angle of the jet and φ is the azimuthal angle between B and C .

$\alpha_s(q^2)$ is the QCD running coupling constant:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{4N_c \beta \ln \frac{q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}}, \quad (2.2)$$

where $\Lambda_{\text{QCD}} \approx$ a few hundred MeV is the intrinsic scale of QCD and

$$\beta = \frac{1}{4N_c} \left(\frac{11}{3}N_c - \frac{4}{3}T_R \right) \quad (2.3)$$

is the first term in the perturbative expansion of the β -function, N_c is the number of colors, $T_R = n_f/2$, where n_f is the number of light quark flavors ($n_f = 3$); it is convenient to scale all relevant parameters in units of $4N_c$.

In (2.1), the integrations over u and z are performed from 0 to 1; the appropriate step functions ensuring $uz \geq x_1$, $u(1-z) \geq x_2$ (positivity of energy) are included in $D_B^{h_1}$ and $D_C^{h_2}$.

2.1 Notations and variables

The notations and conventions, that are used above and throughout the paper are the following. For any given particle with 4-momentum (k_0, \vec{k}) , transverse momentum $k_\perp \geq Q_0$ (k_\perp is the modulus of the trivector \vec{k}_\perp), carrying the fraction $x = k_0/E$ of the jet energy E , one defines

$$\ell = \ln \frac{E}{k_0} = \ln(1/x), \quad y = \ln \frac{k_\perp}{Q_0}. \quad (2.4)$$

Q_0 is the infrared cutoff parameter (minimal transverse momentum).

If the radiated parton is emitted with an angle ϑ with respect to the direction of the jet, one has

$$k_\perp = |\vec{k}| \sin \vartheta \approx k_0 \sin \vartheta. \quad (2.5)$$

The r.h.s. of (2.5) uses $|\vec{k}| \approx k_0$, resulting from the property that the virtuality k^2 of the emitted parton is negligible in the logarithmic approximation. For collinear emissions ($\vartheta \ll 1$), $k_\perp \sim |\vec{k}| \vartheta \approx k_0 \vartheta$.

One also defines the variable Y_ϑ

$$Y_\vartheta = \ell + y = \ln \left(E \frac{k_\perp}{k_0} \frac{1}{Q_0} \right) \approx \ln \frac{E\vartheta}{Q_0}; \quad (2.6)$$

to the opening angle Θ_0 of the jet corresponds

$$Y_{\Theta_0} = \ln \frac{E\Theta_0}{Q_0}; \quad (2.7)$$

$E\Theta_0$ measures the “hardness” of the jet. Since $\vartheta < \Theta_0$, one has the condition, valid for any emitted soft parton off its “parent”

$$Y_{\vartheta} < Y_{\Theta_0}. \quad (2.8)$$

The partonic fragmentation function $D_a^b(x_b, Q, q)$ represents the probability of finding the parton b having the fraction x_b of the energy of a inside the dressed parton a ; the virtuality (or transverse momentum) k_a^2 of a can go up to $|Q^2|$, that of b can go down to $|q^2|$.

2.2 The jet axis

The two quantities studied in the following paragraphs (double differential 1-particle inclusive distribution and inclusive k_{\perp} distribution) refer to the direction (axis) of the jet, with respect to which the angles are measured. We identify it with the direction of the energy flow.

The double differential 1-particle inclusive distribution $\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta}$ is accordingly defined by summing the inclusive double differential 2-particle cross section over all h_2 hadrons and integrating it over their energy fraction x_2 *with a weight which is the energy (x_2) itself*; it measures the angular distribution of an outgoing hadron h_1 with energy fraction x_1 of the jet energy, produced at an angle Θ with respect to the direction of the energy flow.

Once the axis has been fixed, a second (unweighted) integration with respect to the energy of the other hadron (x_1) leads to the inclusive k_{\perp} distribution $\frac{dN}{d \ln k_{\perp}}$.

3. Double differential 1-particle inclusive distribution $\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta}$

After integrating trivially over the azimuthal angle (at this approximation the cross-section does not depend on it), and going to small Θ , the positive quantity $\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta}$ reads

$$\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta} = \sum_{h_2} \int_0^1 dx_2 \, x_2 \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{jet}} dx_1 dx_2 d \ln \Theta} \frac{1}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{jet}}}\right)_0}. \quad (3.1)$$

We use the energy conservation sum rule [12]

$$\sum_h \int_0^1 dx \, x D_C^h(x, \dots) = 1 \quad (3.2)$$

expressing that all partons h_2 within a dressed parton (C) carry the total momentum of C , then make the change of variable $v = \frac{x}{u(1-z)}$ where $u(1-z)$ is the upper kinematic limit for x_2 , to get

$$\sum_{h_2} \int_0^{u(1-z)} dx_2 \, x_2 D_C^{h_2} \left(\frac{x_2}{u(1-z)}, u(1-z)E\Theta, Q_0 \right) = u^2(1-z)^2, \quad (3.3)$$

and finally obtain the desired quantity;

$$\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta} = \sum_{A,B} \int du \int dz \, \frac{1-z}{z} \frac{\alpha_s(k_{\perp}^2)}{2\pi} \Phi_A^B(z) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) D_B^{h_1} \left(\frac{x_1}{uz}, uzE\Theta, Q_0 \right); \quad (3.4)$$

the summation index C has been suppressed since knowing A and B fixes C .

We can transform (3.4) by using the following trick:

$$\int du \int \frac{dz}{z} (1-z) = \int du \int \frac{dz}{z} - \int d(uz) \int \frac{du}{u}, \quad (3.5)$$

and (3.4) becomes

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta} &= \sum_A \int du D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) \sum_B \int \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{2\pi} \Phi_A^B(z) D_B^{h_1}\left(\frac{x_1}{uz}, uzE\Theta, Q_0\right) \\ &\quad - \sum_B \int d(uz) D_B^{h_1}\left(\frac{x_1}{uz}, uzE\Theta, Q_0\right) \\ &\quad \sum_A \int \frac{du}{u} \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{4\pi} \Phi_A^B\left(\frac{uz}{u}\right) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

We then make use of the two complementary DGLAP (see also the beginning of section 4) evolution equations [13] which contain the Sudakov form factors d_A and d_B of the partons A and B respectively:

$$\begin{aligned} d_A^{-1}(k_A^2) \frac{d}{d \ln k_A^2} \left[d_A(k_A^2) D_A^{h_1}\left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0\right) \right] &= \\ &= \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{4\pi} \sum_B \int \frac{dz}{z} \Phi_A^B(z) D_B^{h_1}\left(\frac{x_1}{uz}, uzE\Theta, Q_0\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} d_B(k_B^2) \frac{d}{d \ln k_B^2} \left[d_B^{-1}(k_B^2) D_{A_0}^B(w, E\Theta_0, wE\Theta) \right] &= \\ &= -\frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{4\pi} \sum_A \int \frac{du}{u} \Phi_A^B\left(\frac{w}{u}\right) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta); \end{aligned} \quad (3.8)$$

the variable uz occurring in (3.5) has been introduced; in (3.7) and (3.8), $(uE\Theta)^2$ refers respectively to the virtualities k_A^2 and k_B^2 of A and B . Using (3.7) and (3.8), (3.6) transforms into

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta} &= \sum_A \int du D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) d_A^{-1}(k_A^2) \frac{d}{d \ln k_A^2} \left[d_A(k_A^2) D_A^{h_1}\left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0\right) \right] \\ &\quad + \sum_B \int dw D_B^{h_1}\left(\frac{x_1}{w}, wE\Theta, Q_0\right) d_B(k_B^2) \frac{d}{d \ln k_B^2} \left[d_B^{-1}(k_B^2) D_{A_0}^B(w, E\Theta_0, wE\Theta) \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$D_A^{h_1}$ depends on the virtuality of A through the variable [1] $\Delta\xi = \xi(k_A^2) - \xi(Q_0^2) = \frac{1}{4N_c\beta} \ln \left(\frac{\ln(k_A^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} \right)$ and elementary kinematic considerations [10] lead to $k_A^2 \sim (uE\Theta)^2$.

By renaming $B \rightarrow A$ and $w \rightarrow u$, (3.9) finally becomes

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta} &= \sum_A \int du \left[D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) d_A^{-1}(k_A^2) \frac{d}{d \ln \Theta} \left[d_A(k_A^2) D_A^{h_1}\left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + D_A^{h_1}\left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0\right) d_A(k_A^2) \frac{d}{d \ln \Theta} \left[d_A^{-1}(k_A^2) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) \right] \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_A \frac{d}{d \ln \Theta} \left[\int du D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) D_A^{h_1}\left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0\right) \right], \quad (3.10)$$

and one gets

$$\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln \Theta} = \frac{d}{d \ln \Theta} F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) \quad (3.11)$$

with

$$F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) \equiv \sum_A \int du D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) D_A^{h_1}\left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0\right); \quad (3.12)$$

F defined in (3.12) is the inclusive double differential distribution in x_1 and Θ with respect to the energy flux (the energy fraction of the hadron h_1 within the registered energy flux) and is represented by the convolution of the two functions $D_{A_0}^A$ and D_A^h .

The general formula (3.11) is valid for all x_1 ; its analytical expression in the small x_1 region will be written in the next section.

4. Soft approximation (small- x_1) for $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$

At ℓ_1 fixed, since $y_1 = \ln(k_\perp/Q_0)$ and $Y = \ln(E\Theta/Q_0) = \ell_1 + y_1$, $dy_1 = d \ln k_\perp = d \ln \Theta$ and we write hereafter $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ or $\frac{d^2 N}{d\ell_1 dy_1}$ instead of $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln \Theta}$.

Since the u -integral (3.12) is dominated by $u = \mathcal{O}(1)$,³ the DGLAP [1] partonic distributions $D_{A_0}^A(u, \dots)$ are to be used and, since, on the other hand, we restrict to small x_1 , $x_1/u \ll 1$ and the MLLA inclusive $D_A^{h_1}((x_1/u), \dots)$ are requested. The latter will be taken as the exact solution (see [8]) of the (MLLA) evolution equations that we briefly sketch out, for the sake of completeness, in appendix A. MLLA evolution equations accounts for the constraints of angular ordering (like DLA but unlike DGLAP equations) and of energy-momentum conservation (unlike DLA).

For soft hadrons, the behavior of the function $D_A^{h_1}(x_1, E\Theta, Q_0)$ at $x_1 \ll 1$ is [1]

$$D_A^{h_1}(x_1, E\Theta, Q_0) \approx \frac{1}{x_1} \rho_A^{h_1} \left(\ln \frac{1}{x_1}, \ln \frac{E\Theta}{Q_0} \equiv Y_\Theta \right), \quad (4.1)$$

where $\rho_A^{h_1}$ is a slowly varying function of two logarithmic variables that describes the “hump-backed” plateau.

For $D_A^{h_1}(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0)$ occurring in (3.12), this yields

$$D_A^{h_1}\left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0\right) \approx \frac{u}{x_1} \rho_A^{h_1} \left(\ln \frac{u}{x_1}, \ln u + Y_\Theta \right). \quad (4.2)$$

Because of (2.6), one has

$$\rho_A^h(\ell, Y_\Theta) = \rho_A^{h_1}(\ell, \ell + y) = \tilde{D}_A^h(\ell, y), \quad (4.3)$$

³ $D_A^{h_1}(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0) \approx (u/x_1) \times$ (slowly varying function) — see (4.2) — and the most singular possible behavior of $D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta, Q_0)$, which could enhance the contribution of small u , is $\sim 1/u$; however, the integrand then behaves like $\text{Const.} \times$ (slowly varying function) and the contribution of small u to the integral is still negligible.

and, in what follows, we shall always consider the functions

$$xD_A(x, E\Theta, Q_0) = \tilde{D}_A(\ell, y). \quad (4.4)$$

The expansion of $\rho_A^{h_1} \left(\ln \frac{u}{x_1}, \ln u + Y_\Theta \right)$ around $u = 1$ ($\ln u = \ln 1$) reads

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{u} D_A^{h_1} \left(\frac{x_1}{u}, uE\Theta, Q_0 \right) &= \rho_A^{h_1}(\ell_1 + \ln u, Y_\Theta + \ln u) = \rho_A^{h_1}(\ell_1 + \ln u, y_1 + \ell_1 + \ln u) \\ &= \tilde{D}_A^{h_1}(\ell_1 + \ln u, y_1) = \tilde{D}_A^{h_1}(\ell_1, y_1) + \ln u \frac{d}{d\ell_1} \tilde{D}_A^{h_1}(\ell_1, y_1) + \dots, \end{aligned} \quad (4.5)$$

such that

$$\begin{aligned} x_1 F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) &\approx \sum_A \int du u D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) \left(\tilde{D}_A^{h_1}(\ell_1, y_1) + \ln u \frac{d\tilde{D}_A^{h_1}(\ell_1, y_1)}{d\ell_1} \right) \\ &= \sum_A \left[\int du u D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) \right] \tilde{D}_A^{h_1}(\ell_1, y_1) \\ &\quad + \sum_A \left[\int du u \ln u D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) \right] \frac{d\tilde{D}_A^{h_1}(\ell_1, y_1)}{d\ell_1}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

the second line in (4.6) is the $\mathcal{O}(1)$ main contribution; the third line, which accounts for the derivatives, including the variation of α_s , makes up corrections of relative order $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha_s})$ with respect to the leading terms (see also (4.17)), which have never been considered before; since, in the last line of (4.6), $u \leq 1 \Rightarrow \ln u \leq 0$ and $\frac{d\tilde{D}_A^{h_1}}{d\ell_1}$ is positive (see appendix A.4), the corresponding correction is negative. A detailed discussion of all corrections is made in subsections 4.1 and 4.4

It is important for further calculations that (3.12) has now factorized.

While (3.12) (4.6) involve (inclusive) *hadronic* fragmentation functions $\tilde{D}_A^{h_1} = \tilde{D}_g^{h_1}$ or $\tilde{D}_q^{h_1}$, the MLLA *partonic* functions $\tilde{D}_A^b(\ell, y)$ satisfy the evolution equations (A.2) with exact solution (A.8), demonstrated in [8] and recalled in appendix A. The link between the latter $(\tilde{D}_g^g, \tilde{D}_q^g, \tilde{D}_g^q, \tilde{D}_q^q)$ and the former goes as follows. At small x , since quarks are secondary products of gluons, for a given “parent”, the number of emitted quarks is a universal function of the number of emitted gluons: the upper indices of emitted partons are thus correlated, and we can replace in (4.6) the inclusive fragmentation functions by the partonic ones, go to the functions $\tilde{D}_A(\ell, y)$, where the upper index (which we will omit) is indifferently g or q , and rewrite

$$x_1 F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) \approx \sum_A \left(\langle u \rangle_{A_0}^A + \delta \langle u \rangle_{A_0}^A \psi_{A, \ell_1}(\ell_1, y_1) \right) \tilde{D}_A(\ell_1, y_1), \quad (4.7)$$

with⁴

$$\langle u \rangle_{A_0}^A = \int_0^1 du u D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) \approx \int_0^1 du u D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, E\Theta),$$

⁴In (4.8), u is integrated from 0 to 1, while, kinematically, it cannot get lower than x_1 ; since we are working at small x_1 , this approximation is reasonable.

$$\delta\langle u \rangle_{A_0}^A = \int_0^1 du (u \ln u) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, uE\Theta) \approx \int_0^1 du (u \ln u) D_{A_0}^A(u, E\Theta_0, E\Theta), \quad (4.8)$$

and

$$\psi_{A,\ell_1}(\ell_1, y_1) = \frac{1}{\tilde{D}_A(\ell_1, y_1)} \frac{d\tilde{D}_A(\ell_1, y_1)}{d\ell_1}. \quad (4.9)$$

Thus, for a gluon jet

$$\begin{aligned} x_1 F_g^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) &\approx \langle u \rangle_g^g \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) + \langle u \rangle_g^q \tilde{D}_q(\ell_1, y_1) \\ &\quad + \delta\langle u \rangle_g^g \psi_{g,\ell_1}(\ell_1, y_1) \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \\ &\quad + \delta\langle u \rangle_g^q \psi_{q,\ell_1}(\ell_1, y_1) \tilde{D}_q(\ell_1, y_1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

and for a quark jet

$$\begin{aligned} x_1 F_q^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) &\approx \langle u \rangle_q^g \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) + \langle u \rangle_q^q \tilde{D}_q(\ell_1, y_1) \\ &\quad + \delta\langle u \rangle_q^g \psi_{g,\ell_1}(\ell_1, y_1) \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \\ &\quad + \delta\langle u \rangle_q^q \psi_{q,\ell_1}(\ell_1, y_1) \tilde{D}_q(\ell_1, y_1). \end{aligned} \quad (4.11)$$

It turns out (see [1]) that the MLLA corrections to the formulæ

$$\tilde{D}_q^g \approx \frac{C_F}{N_c} \tilde{D}_g^g, \quad \tilde{D}_q^q \approx \frac{C_F}{N_c} \tilde{D}_g^q, \quad (4.12)$$

do not modify the results and we use (4.12) in the following. We rewrite accordingly (4.10) and (4.11)

$$\begin{aligned} x_1 F_g^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) &\approx \frac{\langle C \rangle_g^0 + \delta\langle C \rangle_g}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \equiv \frac{\langle C \rangle_g}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1), \\ x_1 F_q^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0) &\approx \frac{\langle C \rangle_q^0 + \delta\langle C \rangle_q}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \equiv \frac{\langle C \rangle_q}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1), \end{aligned} \quad (4.13)$$

with

$$\begin{aligned} \langle C \rangle_g^0 &= \langle u \rangle_g^g N_c + \langle u \rangle_g^q C_F, \\ \langle C \rangle_q^0 &= \langle u \rangle_q^g N_c + \langle u \rangle_q^q C_F, \end{aligned} \quad (4.14)$$

and where we have called

$$\begin{aligned} \delta\langle C \rangle_g &= N_c \delta\langle u \rangle_g^g \psi_{g,\ell_1}(\ell_1, y_1) + C_F \delta\langle u \rangle_g^q \psi_{q,\ell_1}(\ell_1, y_1), \\ \delta\langle C \rangle_q &= N_c \delta\langle u \rangle_q^g \psi_{g,\ell_1}(\ell_1, y_1) + C_F \delta\langle u \rangle_q^q \psi_{q,\ell_1}(\ell_1, y_1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\langle C \rangle_{A_0}$ is the average color current of partons caught by the calorimeter.

Plugging (4.13) into (3.11) yields the general formula

$$\left(\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp} \right)_{q,g} = \frac{d}{dy_1} \left[\frac{\langle C \rangle_{q,g}}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \right] \quad (4.16)$$

The first line of (4.10) and (4.11) are the leading terms, the second and third lines are corrections. Their relative order is easily determined by the following relations (see (A.3) for the definition of γ_0)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp} &= \frac{\langle C \rangle_{q,g}}{N_c} \frac{d}{dy_1} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) + \frac{1}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \frac{d}{dy_1} \langle C \rangle_{q,g}, \\ \frac{d}{dy_1} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) &= \mathcal{O}(\gamma_0) = \mathcal{O}(\sqrt{\alpha_s}), \\ \frac{d}{dy_1} \langle C \rangle_{q,g} &= \mathcal{O}(\gamma_0^2) = \mathcal{O}(\alpha_s); \end{aligned} \quad (4.17)$$

The different contributions are discussed in subsections 4.1 and 4.4 below.

- $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{d\ln k_\perp} \equiv \frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{dy}$ (see the beginning of this section) occurring in (4.16) is plotted in figure 12 and 13 of appendix A, and $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{d\ell}$ occurring in (4.7) (4.9) is plotted in figures 14 and 15.
- The expressions for the leading terms of $x_1 F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0)$ together with the ones of $\langle C \rangle_g^0$ and $\langle C \rangle_q^0$ are given in appendix B.
- The calculations of $\delta\langle C \rangle_g$ and $\delta\langle C \rangle_q$ are detailed in appendix C, where the explicit analytical expressions for the $\langle u \rangle$'s and $\delta\langle u \rangle$'s are also given.

We call “naive” the approach” in which one disregards the evolution of the jet between Θ_0 and Θ ; this amounts to taking to zero the derivative of $\langle C \rangle_{q,g}$ in (4.16); (B.2), (B.3), (B.4) then yield

$$\langle C \rangle_g^{\text{naive}} = N_c, \quad \langle C \rangle_q^{\text{naive}} = C_F. \quad (4.18)$$

4.1 The average color current $\langle C \rangle_{A_0}$

On figure 2 below, we plot, for $Y_{\Theta_0} = 7.5$, $\langle C \rangle_q^0$, $\langle C \rangle_q^0 + \delta\langle C \rangle_q$, $\langle C \rangle_g^0$, $\langle C \rangle_g^0 + \delta\langle C \rangle_g$ as functions of y , for $\ell = 2.5$ on the left and $\ell = 3.5$ on the right. Since $\Theta \leq \Theta_0$, the curves stop at y such that $y + \ell = Y_{\Theta_0}$; they reach then their respective asymptotic values N_c for $\langle C \rangle_g$ and C_F for $\langle C \rangle_q$, at which $\delta\langle C \rangle_q$ and $\delta\langle C \rangle_g$ also vanish (see also the naive approach (4.18)). These corrections also vanish at $y = 0$ because they are proportional to the logarithmic derivative $(1/\tilde{D}(\ell, y))(d\tilde{D}(\ell, y)/d\ell)$ (see (4.15)) which both vanish, for q and g , at $y = 0$ (see appendix A, and figures 16–17); there, the values of $\langle C \rangle_g$ and $\langle C \rangle_q$ can be determined from (B.2)(B.3).

The curves corresponding to LEP and Tevatron working conditions, $Y_{\Theta_0} = 5.2$, are shown in appendix D.

Two types of MLLA corrections arise in our calculation, which are easily visualized on figure 2:

- through the expansion (4.5) around $u = 1$, the average color current $\langle C \rangle_{A_0}^0$ gets modified by $\delta\langle C \rangle_{A_0} \leq 0$ of relative order $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha_s})$; it is represented on figure 2 by the vertical difference between the straight lines ($\langle C \rangle_{A_0}^0$) and the curved ones ($\langle C \rangle_{A_0}^0 + \delta\langle C \rangle_{A_0}$);

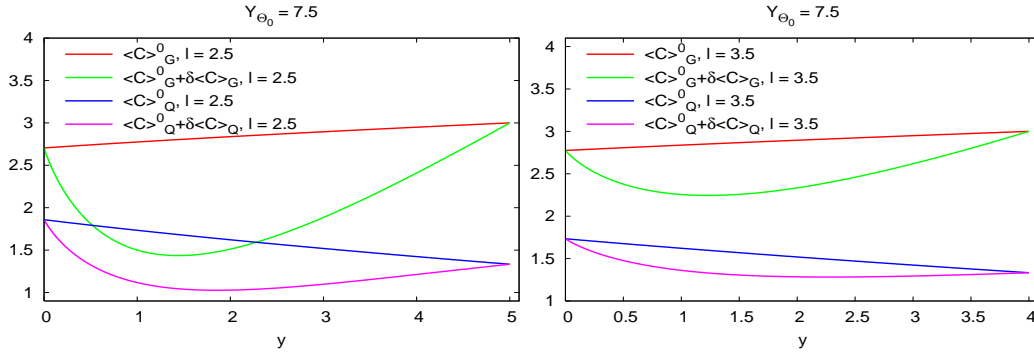


Figure 2: $\langle C \rangle_{A_0}^0$ and $\langle C \rangle_{A_0}^0 + \delta \langle C \rangle_{A_0}$ for quark and gluon jets, as functions of y , for $Y_{\Theta_0} = 7.5$, $\ell = 2.5$ on the left and $\ell = 3.5$ on the right.

- the derivative of $\langle C \rangle_{A_0}^0$ with respect to y is itself of relative order $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha_s})$ with respect to that of \tilde{D}_g ; it is the slopes of the straight lines in figure 2.

The y derivatives of $\langle C \rangle_{A_0}^0 + \delta \langle C \rangle_{A_0}$ differ from the ones of the leading $\langle C \rangle_{A_0}^0$; this effect combines the two types of MLLA corrections mentioned above: the derivation of $\langle C \rangle$ with respect to y and the existence of $\delta \langle C \rangle$.

For $Y_{\Theta_0} = 7.5$, the $\delta \langle C \rangle$ correction can represent 50% of $\langle C \rangle_g$ at $\ell = 2.5$ and $y \approx 1.5$; for higher values of ℓ (smaller x), as can be seen on the right figure, its importance decreases; it is remarkable that, when $\delta \langle C \rangle$ is large, the corrections to $\frac{d\langle C \rangle}{dy}$ with respect to $\frac{d\langle C \rangle^0}{dy}$ become small, *and vice-versa*: at both extremities of the curves for the color current, the $\delta \langle C \rangle$ corrections vanish, but their slopes are very different from the ones of the straight lines corresponding to $\langle C \rangle^0$.

So, all corrections that we have uncovered are potentially large, even $\frac{d\delta \langle C \rangle}{dy}$, which is the y derivative of a MLLA corrections. This raises the question of the validity of our calculations. Several conditions need to be fulfilled at the same time:

- one must stay in the perturbative regime, which needs $y_1 \geq 1$ ($k_\perp > 2.72\Lambda_{\text{QCD}} \approx .7 \text{ GeV}$; this condition excludes in particular the zone of very large increase of $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ when $y_1 \rightarrow 0$ (this property is linked to the divergence of the running coupling constant of QCD $\alpha_s(k_\perp^2) \rightarrow \infty$ when $k_\perp \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}$).
- x must be small, that is ℓ large enough, since this is the limit at which we have obtained analytical results; we see on figure 2 that it cannot go reasonably below $\ell = 2.5$; this lower threshold turns out to be of the same order magnitude as the one found in the forthcoming study of 2-particle correlations inside one jet in the MLLA approximation [9];
- (MLLA) corrections to the leading behavior must stay under control (be small “enough”); if one only looks at the size of the $\delta \langle C \rangle$ corrections at $Y_{\Theta_0} = 7.5$, it would be very tempting to exclude $y \in [.5, 2.5]$; however this is without taking into account the y derivatives of $\langle C \rangle$, which also play an important role, as stressed above; our

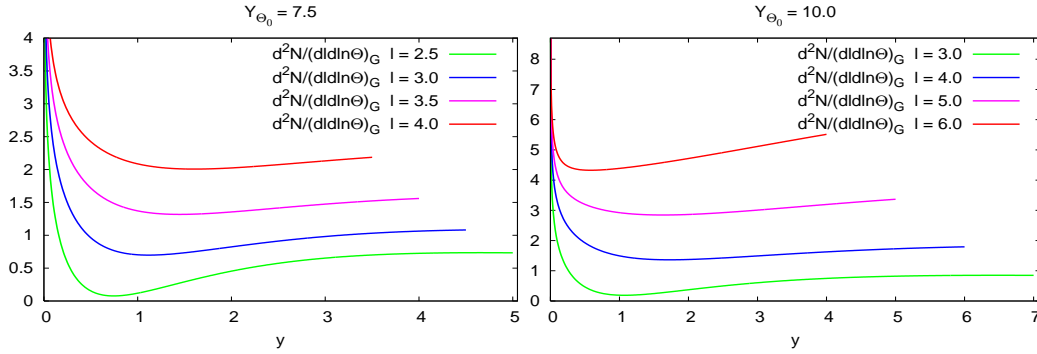


Figure 3: $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ for a gluon jet.

attitude, which will be confirmed or not by experimental results, is to only globally constrain the overall size of all corrections by setting x small enough.

Would the corrections become excessively large, the development (4.5) should be pushed one step further, which corresponds to next-to-MLLA (NMLLA) corrections; this should then be associated with NMLLA evolution equations for the inclusive spectrum, which lies out of the scope of the present work.

Though $\delta\langle C \rangle$ can be large, specially at small values of ℓ , the positivity of $\langle C \rangle^0 + \delta\langle C \rangle$ is always preserved on the whole allowed range of y .

The difference between the naive and MLLA calculations lies in neglecting or not the evolution of the jet between Θ_0 and Θ , or, in practice, in considering or not the average color current $\langle C \rangle_{A_0}$ as a constant.

We present below our results for a gluon and for a quark jet. We choose two values $Y_{\Theta_0} = 7.5$, which can be associated with the LHC environment,⁵ and the unrealistic $Y_{\Theta_0} = 10$ (see appendix D for $Y_{\Theta_0} = 5.2$ and 5.6 , corresponding to the LEP and Tevatron working conditions). For each value of Y_{Θ_0} we make the plots for two values of ℓ_1 , and compare one of them with the naive approach.

In the rest of the paper we always consider the limiting case $Q_0 \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}} \Leftrightarrow \lambda \approx 0$,

$$\lambda = \ln \frac{Q_0}{\Lambda_{\text{QCD}}}. \quad (4.19)$$

4.2 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ at small x_1 : gluon jet

On figure 3 below is plotted the double differential distribution $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ of a parton inside a gluon jet as a function of y_1 for different values of ℓ_1 (fixed).

On figure 4 are compared, for a given value of ℓ_1 , the two following cases:

- the first corresponds to the full formulæ (4.13) (4.16);

⁵Sharing equally the 14 TeV of available center of mass energy between the six constituent partons of the two colliding nucleons yields $E \approx 2.3$ TeV by colliding parton, one considers a jet opening angle of $\Theta \approx .25$ and $Q_0 \approx \Lambda_{\text{QCD}} \approx 250$ MeV; this gives $Y = \ln \frac{E\Theta}{Q_0} \approx 7.7$.

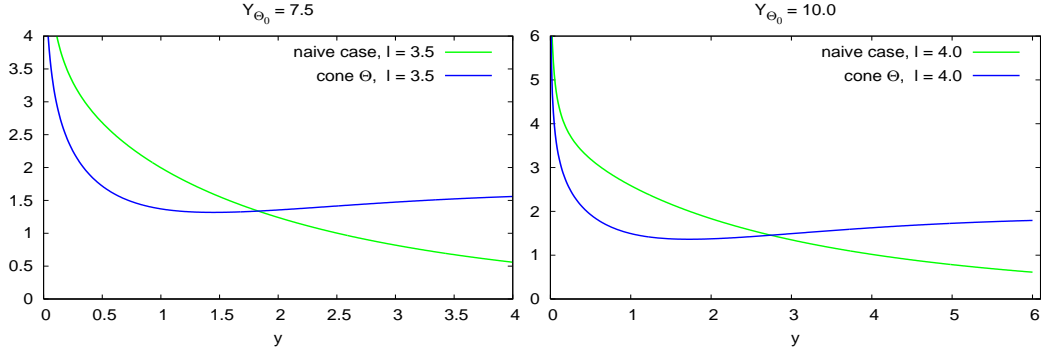


Figure 4: $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ for a gluon jet at fixed ℓ_1 , MLLA and naive approach.

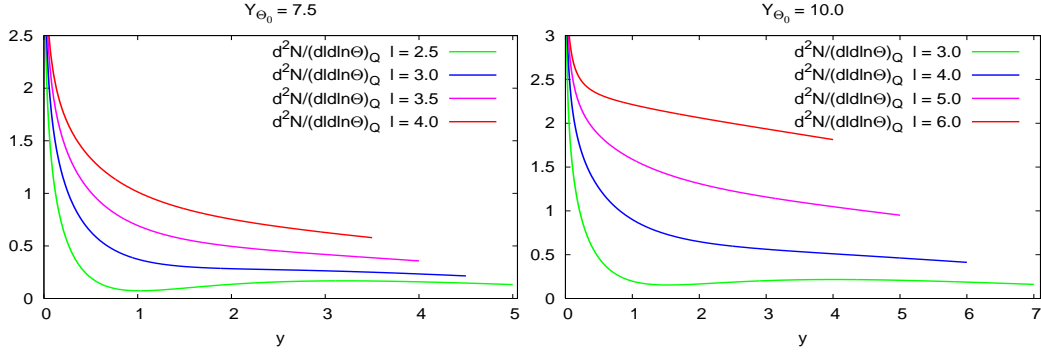


Figure 5: $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ for a quark jet.

- the second corresponds to the naive approach (see the definition above (4.18))

$$\left(\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp} \right)_g^{\text{naive}} = \frac{d}{dy_1} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1); \quad (4.20)$$

$\frac{d\tilde{D}_g(\ell_1, y_1)}{dy_1}$ is given in (A.12).

The raise of the distribution at large k_\perp is due to the positive corrections already mentioned in the beginning of this section, which arise from the evolution of the jet between Θ and Θ_0 .

4.3 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ at small x_1 : quark jet

On figure 5 is plotted the double differential distribution $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ of a parton inside a quark jet as a function of y_1 for different values of ℓ_1 (fixed).

On figure 6 are compared, for a given ℓ_1 fixed, the full formulæ (4.13) (4.16) and the naive approach

$$\left(\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp} \right)_q^{\text{naive}} = \frac{C_F}{N_c} \frac{d}{dy_1} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1). \quad (4.21)$$

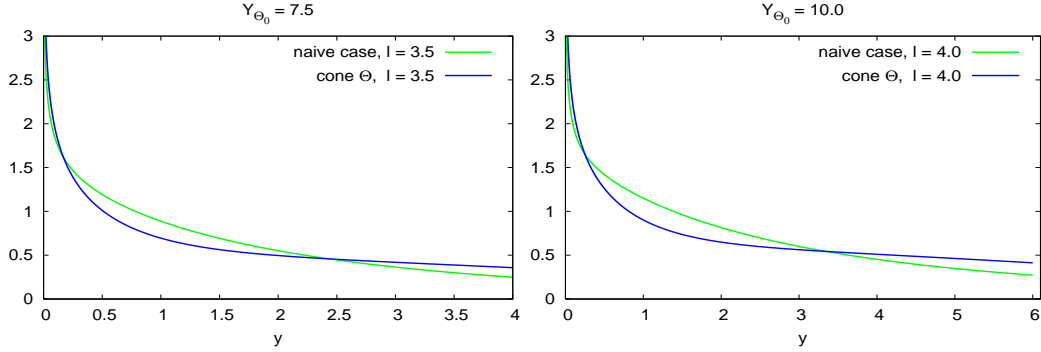


Figure 6: $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ for a quark jet at fixed ℓ_1 , MLLA and naive approach.

We note, like for gluon jets, at large y , a (smaller) increase of the distribution, due to taking into account the jet evolution between Θ and Θ_0 .

4.4 Comments

The gluon distribution is always larger than the quark distribution; this can also be traced in figure 2 which measures in particular the ratio of the color currents $\langle C \rangle_g / \langle C \rangle_q$.

The curves for $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ have been drawn for $\ell_1 \equiv \ln(1/x_1) \geq 2.5$; going below this threshold exposes to excessively large MLLA corrections.

The signs of the two types of MLLA corrections pointed at in subsection 4.1 vary with y : $\delta \langle C \rangle$ always brings a negative correction to $\langle C \rangle^0$, and to $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$; for $y \geq 1.5$, the slope of $\langle C \rangle$ is always larger than the one of $\langle C \rangle^0$, while for $y \leq 1.5$ it is the opposite. It is accordingly not surprising that, on figures 4 and 6, the relative positions of the curves corresponding to the MLLA calculation and to a naive calculation change with the value of y . At large y , one gets a growing behavior of $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp}$ for gluon jets (figure 4), and a slowly decreasing one for quark jets (figure 6), which could not have been anticipated *a priori*.

We study in appendix E.2, how MLLA results compare with DLA [14, 15], in which the running of α_s has been “factored out”.

5. Inclusive k_\perp distribution $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$

Another quantity of interest is the inclusive k_\perp distribution which is defined by

$$\left(\frac{dN}{d \ln k_\perp} \right)_{g \text{ or } q} = \int dx_1 \left(\frac{d^2 N}{dx_1 d \ln k_\perp} \right)_{g \text{ or } q} \equiv \int_{\ell_{\min}}^{Y_{\Theta_0}-y} d\ell_1 \left(\frac{d^2 N}{d\ell_1 d \ln k_\perp} \right)_{g \text{ or } q}; \quad (5.1)$$

it measures the transverse momentum distribution of one particle with respect to the direction of the energy flow (jet axis).

We have introduced in (5.1) a lower bound of integration ℓ_{\min} because our calculations are valid for small x_1 , that is for large ℓ_1 . In a first step we take $\ell_{\min} = 0$, then vary it to study the sensitivity of the calculation to the region of large x_1 .

We plot below the inclusive k_\perp distributions for gluon and quark jets, for the same two values $Y_{\Theta_0} = 7.5$ and $Y_{\Theta_0} = 10$ as above, and compare them, on the same graphs, with the “naive calculations” of the same quantity.

5.1 Gluon jet; $\ell_{\min} = 0$

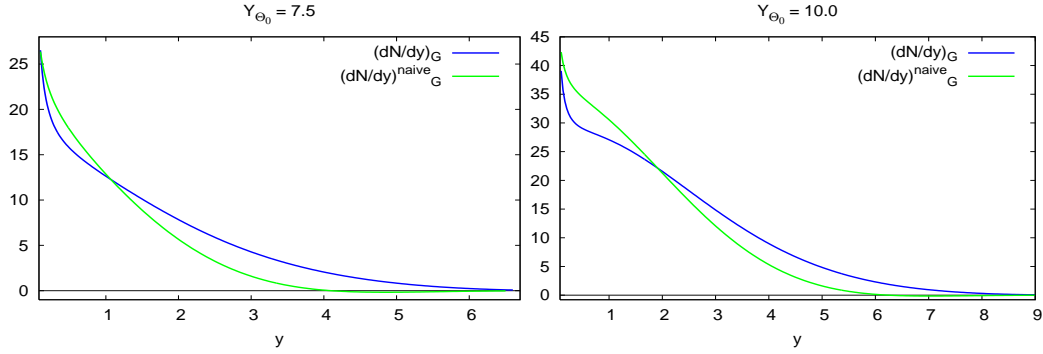


Figure 7: $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$ for a gluon jet, MLLA and naive approach, for $\ell_{\min}=0$, $Y_{\Theta_0} = 7.5$ and $Y_{\Theta_0} = 10$.

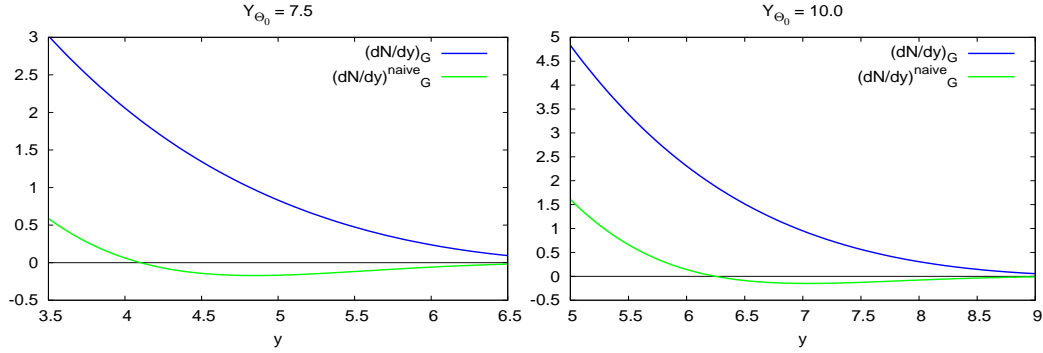


Figure 8: Enlargements of figure 7 at large k_\perp .

5.2 Quark jet; $\ell_{\min} = 0$

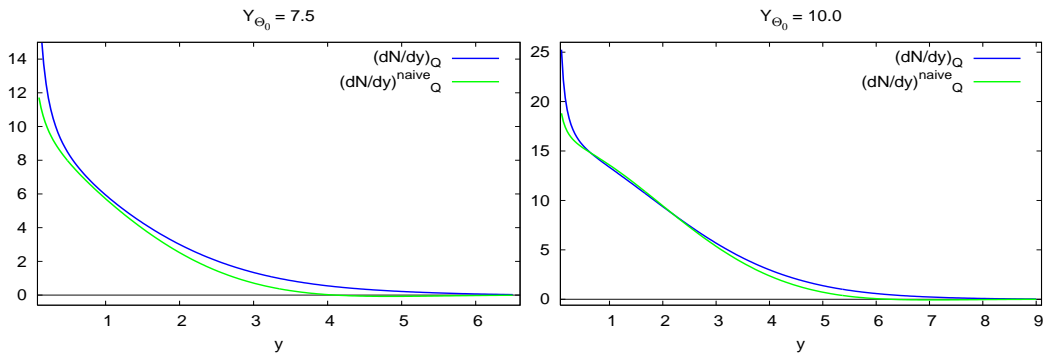


Figure 9: $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$ for a quark jet, MLLA and naive approach, for $\ell_{\min}=0$, $Y_{\Theta_0} = 7.5$ and $Y_{\Theta_0} = 10$.

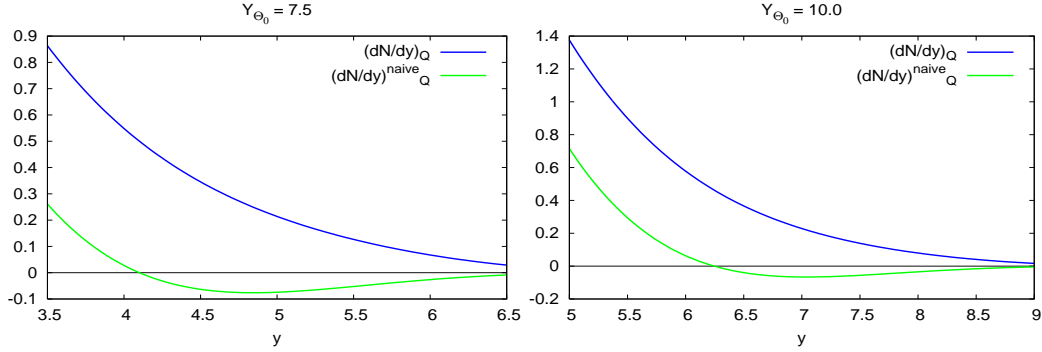


Figure 10: Enlargements of figure 9 at large k_{\perp} .

5.3 Role of the lower limit of integration ℓ_{\min}

To get an estimate of the sensitivity of the calculation of $\frac{dN}{d \ln k_{\perp}}$ to the lower bound of integration in (5.1), we plot in figure 11 below the two results obtained at $Y_{\Theta_0} = 7.5$ for $\ell_{\min} = 2$ and $\ell_{\min} = 0$, for a gluon jet (left) and a quark jet (right).

The shapes of the corresponding distributions are identical; they only differ by a vertical shift which is small in the perturbative region $y \geq 1$ (restricting the domain of integration — increasing ℓ_{\min} — results as expected in a decrease of $\frac{dN}{d \ln k_{\perp}}$). This shows that, though our calculation is only valid at small x_1 , the sensitivity of the final result to this parameter is small.

5.4 Discussion

MLLA corrections are seen on figure 8 and figure 10 to cure the problems of positivity which occur in the naive approach.

The range of ℓ_1 integration in the definition (5.1) of $\frac{dN}{d \ln k_{\perp}}$ should be such that, at least, its upper bound corresponds to x_1 small enough; we have seen in the discussion of MLLA corrections to the color current in subsection 4.1 that one should reasonably consider $\ell_1 \geq 2.5$; at fixed Y_{Θ_0} this yields the upper bound $y_1 \leq Y_{\Theta_0} - 2.5$, that is, at LHC $y_1 \leq 5$.

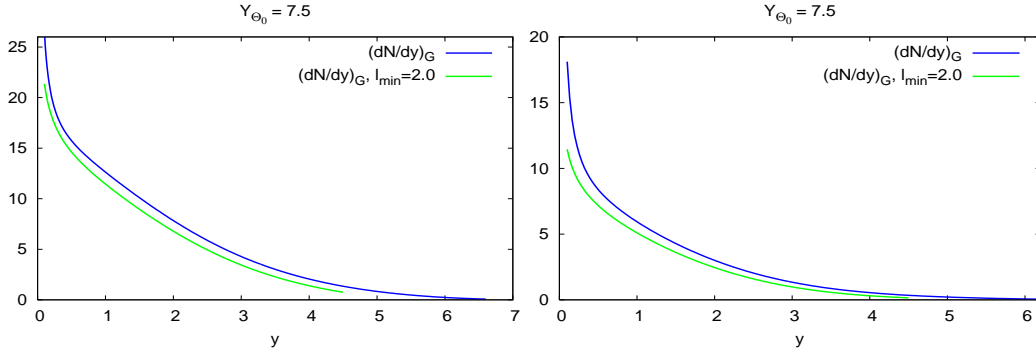


Figure 11: $\frac{dN}{d \ln k_{\perp}}$ with $\ell_{\min} = 2$ and $\ell_{\min} = 0$ for gluon (left) and quark (right) jet.

On the other side, the perturbative regime we suppose to start at $y_1 \geq 1$. These mark the limits of the interval where our calculation can be trusted $1 \leq y_1 \leq 5$ at LHC. For $y_1 < 1$ non-perturbative corrections will dominate, and for $y_1 > Y_{\Theta_0} - \ell_1^{\min} \approx Y_{\Theta_0} - 2.5$, the integration defining $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$ ranges over values of x_1 which lie outside our small x approximation and for which the MLLA corrections become accordingly out of control.

On the curves of figures 7 and 9 at $Y_{\Theta_0} = 10$, the small y region exhibits a bump which comes from the competition between two phenomena: the divergence of $\alpha_s(k_\perp^2)$ when $k_\perp \rightarrow Q_0$ and coherence effects which deplete multiple production at very small momentum. The separation of these two effects is still more visible at $Y_{\Theta_0} = 15$, which is studied in appendix E.3, where a comparison with DLA calculations is performed. At smaller Y_{Θ_0} , the divergence of α_s wins over coherence effects and the bump disappears.

The curves corresponding to the LEP and Tevatron working conditions are given in appendix D.

5.4.1 Mixed quark and gluon jets

In many experiments, the nature of the jet (quark or gluon) is not determined, and one simply detects outgoing hadrons, which can originate from either type; one then introduces a “mixing” parameter ω , which is to be determined experimentally, such that, for example if one deals with the inclusive k_\perp distribution

$$\left(\frac{dN}{d \ln k_\perp} \right)_{\text{mixed}} = \omega \left(\frac{dN}{d \ln k_\perp} \right)_g + (1 - \omega) \left(\frac{dN}{d \ln k_\perp} \right)_q. \quad (5.2)$$

It is in this framework that forthcoming data from the LHC will be compared with our theoretical predictions; since outgoing charged hadrons are detected, one introduces the phenomenological parameter \mathcal{K}^{ch} [1, 7] normalizing partonic distributions to the ones of charged hadrons

$$\left(\frac{dN}{d \ln k_\perp} \right)^{\text{ch}} = \mathcal{K}^{\text{ch}} \left(\frac{dN}{d \ln k_\perp} \right)_{\text{mixed}}. \quad (5.3)$$

6. Conclusion

After deducing a general formula, valid for all x , for the double differential 2-particle inclusive cross section for jet production in a hard collision process, the exact solutions of the MLLA evolution equations [8] have been used to perform a small x calculation of the double differential 1-particle inclusive distributions and of the inclusive k_\perp distributions for quark and gluon jets.

Sizable differences with the naive approach in which one forgets the jet evolution between its opening angle Θ_0 and the emission angle Θ have been found; their role is emphasized to recover, in particular, the positivity of the distributions.

MLLA corrections increase with x and decrease when the transverse momentum k_\perp of the outgoing hadrons gets larger; that they stay “within control” requires in practice that the small x region should not be extended beyond $\ell < 2.5$; it is remarkable that similar bounds arise in the study of 2-particle correlations [9]. At fixed Y_{Θ_0} , the lower

bound for ℓ translates into an upper bound for y ; this fixes in particular the upper limit of confidence for our calculation of $\frac{dN}{d\ln k_\perp}$; above this threshold, though k_\perp is larger (more “perturbative”), the small x approximation is no longer valid.

The “divergent” behavior of the MLLA distributions for $y \rightarrow 0$ forbids extending the confidence domain of MLLA lower than $y \geq 1$, keeping away from the singularity of $\alpha_s(k_\perp^2)$ when $k_\perp \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}$.

The two (competing) effects of coherence (damping of multiple production at small momentum) and divergence of $\alpha_s(k_\perp^2)$ at small k_\perp for the inclusive k_\perp distribution have been exhibited.

MLLA and DLA calculations have been compared; in “modified” MLLA calculations, we have furthermore factored out the α_s dependence to ease the comparison with DLA.

While the goal of this work is a comparison of our theoretical predictions with forthcoming data from LHC and Tevatron, we have also given results for LEP. LHC energies will provide a larger trustable domain of comparison with theoretical predictions at small x .

Further developments of this work aim at getting rid of the limit $Q_0 \approx \Lambda_{\text{QCD}}$ and extending the calculations to a larger range of values of x ; then, because of the lack of analytical expressions, the general formulæ (3.11) and (3.12) should be numerically investigated, which will also provide a deeper insight into the connection between DGLAP and MLLA evolution equations [16].

Acknowledgments

It is a pleasure to thank M. Cacciari, Yu.L. Dokshitzer and G.P. Salam for many stimulating discussions, and for expert help in numerical calculations. R.P-R. wants to specially thank Y.L. Dokshitzer for his guidance and encouragements.

A. Exact solution of the MLLA evolution equation for the fragmentation functions; the spectrum and its derivatives

A.1 MLLA evolution equation for a gluon jet

Because of (4.12), we will only write the evolution equations for gluonic fragmentation functions D_g^b .

The partonic structure functions D_a^b satisfy an evolution equation which is best written when expressed in terms of the variables ℓ and y and the functions \tilde{D}_a^b defined by [1] (see also (4.1) (4.3)):

$$x_b D_a^b(x_b, k_a, q) = \tilde{D}_a^b(\ell_b, y_b). \quad (\text{A.1})$$

The parton content \tilde{D}_g of a gluon is shown in [8] to satisfy the evolution equation (Y and y are linked by (2.6))

$$\tilde{D}_g(\ell, y) = \delta(\ell) + \int_0^y dy' \int_0^\ell d\ell' \gamma_0^2(\ell' + y') [1 - a\delta(\ell' - \ell)] \tilde{D}_g(\ell', y'), \quad (\text{A.2})$$

where the anomalous dimension $\gamma_0(y)$ is given by (λ is defined in (4.19))

$$\gamma_0^2(y) = 4N_c \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{2\pi} \approx \frac{1}{\beta(y + \lambda)}. \quad (\text{A.3})$$

(see the beginning of section 2 for β , T_R , C_F , α_s , N_c) and

$$a = \frac{1}{4N_c} \left[\frac{11}{3}N_c + \frac{4}{3}T_R \left(1 - \frac{2C_F}{N_c} \right) \right]; \quad C_F = 4/3 \text{ for } \text{SU}(3)_c. \quad (\text{A.4})$$

The (single logarithmic) subtraction term proportional to a in (A.2) accounts for *gluon* \rightarrow *quark* transitions in parton cascades as well as for energy conservation — the so-called “hard corrections” to parton cascading —.

No superscript has been written in the structure functions D_g because the same equation is valid indifferently for D_g^g and D_g^q (see section 4). One considers that the same evolution equations govern the (inclusive) hadronic distributions D_g^h (Local Hadron Parton Duality).

A.2 Exact solution of the MLLA evolution equation for particle spectra

The exact solution of the evolution equation (A.2), which includes constraints of energy conservation and the running of α_s , is demonstrated in [8] to be given by the following Mellin’s representation

$$\begin{aligned} \tilde{D}_g(\ell, y, \lambda) = (\ell + y + \lambda) \int \frac{d\omega}{2\pi i} \int \frac{d\nu}{2\pi i} e^{\omega\ell + \nu y} \\ \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/(\beta(\omega - \nu))} \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta} e^{-\lambda s}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

From (A.5) and taking the high energy limit⁶ $\ell + y \equiv Y \gg \lambda$ one gets [1, 7] the explicit formula

$$\tilde{D}_g(\ell, y) = \frac{\ell + y}{\beta B(B + 1)} \int \frac{d\omega}{2\pi i} e^{-\omega y} \Phi(A + 1, B + 2, \omega(\ell + y)), \quad (\text{A.6})$$

where Φ is the confluent hypergeometric function the integral representation of which reads [17, 18]

$$\begin{aligned} \Phi(A + 1, B + 2, \omega Y) = \Gamma(B + 2) (\omega Y)^{-B-1} \int \frac{dt}{(2\pi i)} \frac{t^{-B}}{t(t - 1)} \left(\frac{t}{t - 1} \right)^A e^{\omega Y t}; \\ \text{with } A = \frac{1}{\beta\omega}, \quad B = \frac{a}{\beta}, \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty d\chi \chi^{n-1} e^{-\chi}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Exchanging the t and ω integrations of (A.6) (A.7) and going from t to the new variable $\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{t}{t-1}$, (A.6) becomes

$$\tilde{D}_g(\ell, y) = 2 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \Re \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\pi} e^{-B\alpha} \mathcal{F}_B(\tau, y, \ell) \right), \quad (\text{A.8})$$

⁶ $Y \gg \lambda \Leftrightarrow E\Theta \gg Q_0^2/\Lambda_{\text{QCD}}$ is not strictly equivalent to $Q_0 \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}$ (limiting spectrum).

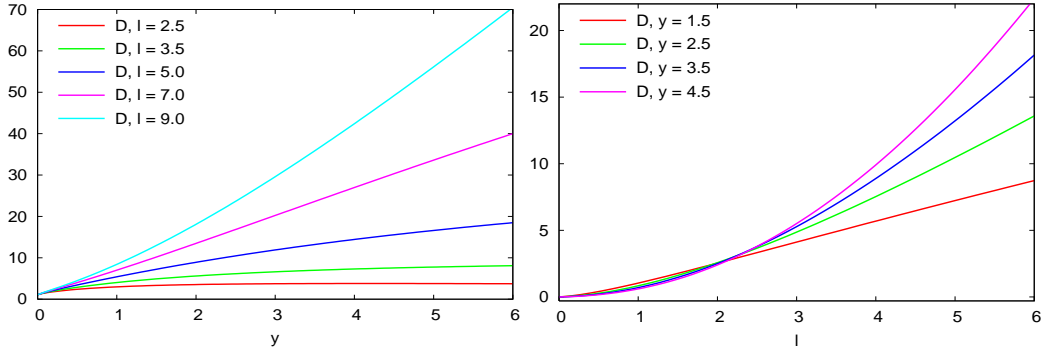


Figure 12: Spectrum $\tilde{D}(\ell, y)$ of emitted partons as functions of transverse momentum (left) and energy (right).

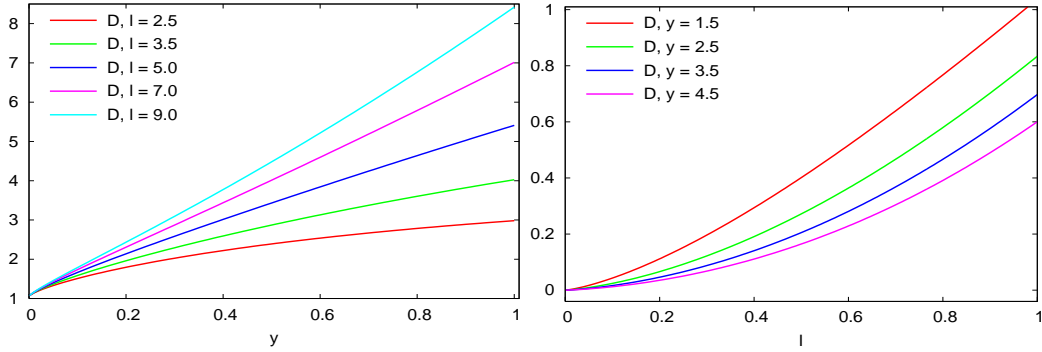


Figure 13: Spectrum $\tilde{D}(\ell, y)$ of emitted partons as functions of transverse momentum (left) and energy (right): enlargement of figure 12.

where the integration is performed with respect to τ defined by $\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{\ell} + i\tau$,

$$\mathcal{F}_B(\tau, y, \ell) = \left[\frac{\cosh \alpha - \frac{y-\ell}{y+\ell} \sinh \alpha}{\frac{\ell+y}{\beta} \frac{\alpha}{\sinh \alpha}} \right]^{B/2} I_B(2\sqrt{Z(\tau, y, \ell)}),$$

$$Z(\tau, y, \ell) = \frac{\ell+y}{\beta} \frac{\alpha}{\sinh \alpha} \left(\cosh \alpha - \frac{y-\ell}{y+\ell} \sinh \alpha \right); \quad (\text{A.9})$$

I_B is the modified Bessel function of the first kind.

A.3 The spectrum

On figure 12 below, we represent, on the left, the spectrum as a function of the transverse momentum (via y) for fixed ℓ and, on the right, as a function of the energy (via ℓ) for fixed transverse momentum.

Figure 13 shows enlargements of figure 12 for small values of y and ℓ respectively; they ease the understanding of the curves for the derivatives of the spectrum presented in subsection A.4.

A comparison between MLLA and DLA calculations of the spectrum is done in appendix E.1.

A.4 Derivatives of the spectrum

We evaluate below the derivatives of the spectrum w.r.t. $\ln k_\perp$ and $\ln(1/x)$.

We make use of the following property for the confluent hypergeometric functions Φ [18]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\ell} \Phi(A+1, B+2, \omega(\ell+y)) &\equiv \frac{d}{dy} \Phi(A+1, B+2, \omega(\ell+y)) \\ &= \omega \frac{A+1}{B+2} \Phi(A+2, B+3, \omega(\ell+y)). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

- We first determine the derivative w.r.t. $\ell \equiv \ln(1/x)$. Differentiating (A.6) w.r.t. ℓ , and developing (A.10), one gets⁷ [8]

$$\frac{d}{d\ell} \tilde{D}_g(\ell, y) = 2 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\pi} e^{-B\alpha} \left[\frac{1}{\ell+y} (1 + 2e^\alpha \sinh \alpha) \mathcal{F}_B + \frac{1}{\beta} e^\alpha \mathcal{F}_{B+1} \right]; \quad (\text{A.11})$$

- Differentiating w.r.t. $y \equiv \ln \frac{k_\perp}{Q_0}$ yields

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \tilde{D}_g(\ell, y) &= 2 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\pi} e^{-B\alpha} \left[\frac{1}{\ell+y} (1 + 2e^\alpha \sinh \alpha) \mathcal{F}_B \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta} e^\alpha \mathcal{F}_{B+1} - \frac{2 \sinh \alpha}{\ell+y} \mathcal{F}_{B-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

In figure 14, figure 15, figure 16 and figure 17 below, we draw the curves for:

- $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{dy}$ as a function of y , for different values of ℓ fixed;
- $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{dy}$ as a function of ℓ , for different values of y fixed;
- $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{d\ell}$ as a function of ℓ for different values of y fixed;
- $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{d\ell}$ as a function of y for different values of ℓ fixed.

In each case the right figure is an enlargement, close to the origin of axes, of the left figure.

That $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{dy}$ goes to infinity when $y \rightarrow 0$ is in agreement with the analytic behavior in $\ln(\ell/y)$ of this derivative.

⁷(A.11) and (A.12) have also been checked by numerically differentiating (A.8).

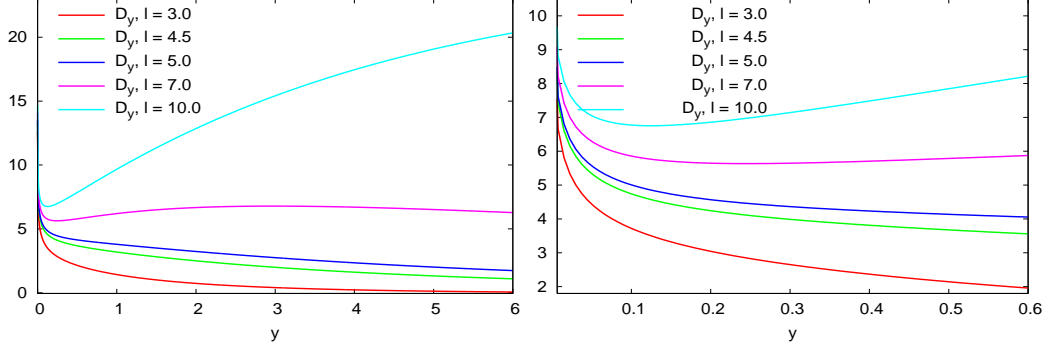


Figure 14: $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{dy}$ as a function of y for different values of ℓ .

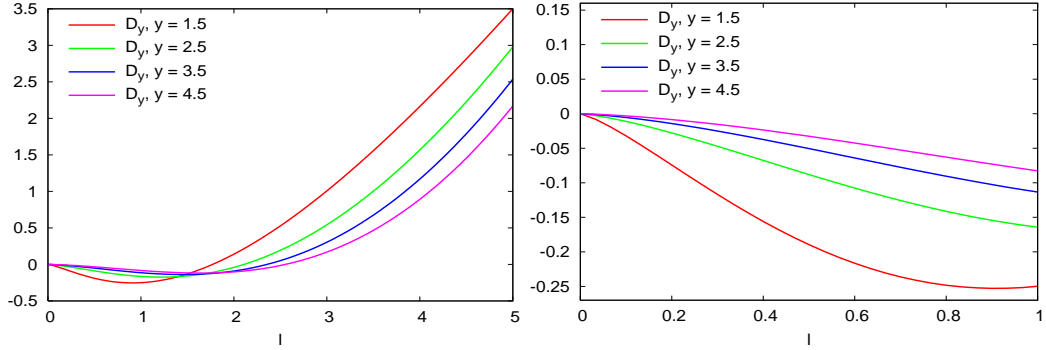


Figure 15: $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{dy}$ as a function of ℓ for different values of y .

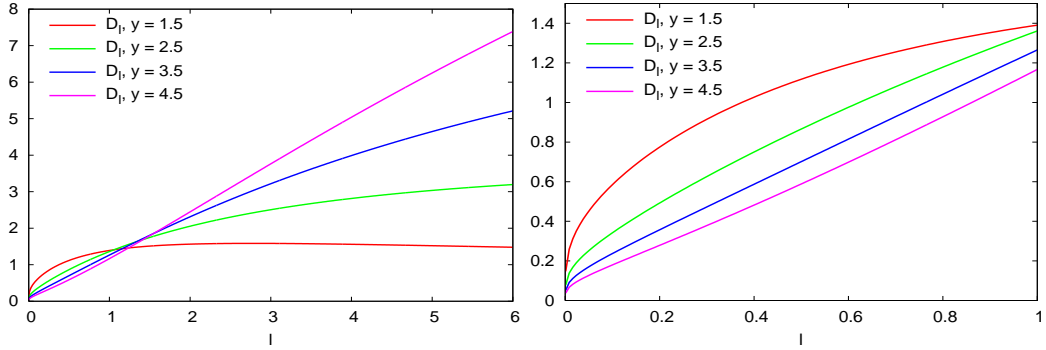


Figure 16: $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{d\ell}$ as a function of ℓ for different values of y .

B. Leading contributions to $x_1 F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0)$ at small x_1

Using (4.12), the leading terms of $x_1 F_{A_0}^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0)$ (4.6) calculated at small x_1 read

$$x_1 F_g^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0)^0 \approx \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \left(\langle u \rangle_g^q + \frac{C_F}{N_c} \langle u \rangle_g^q \right) = \frac{\langle C \rangle_g^0}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1),$$

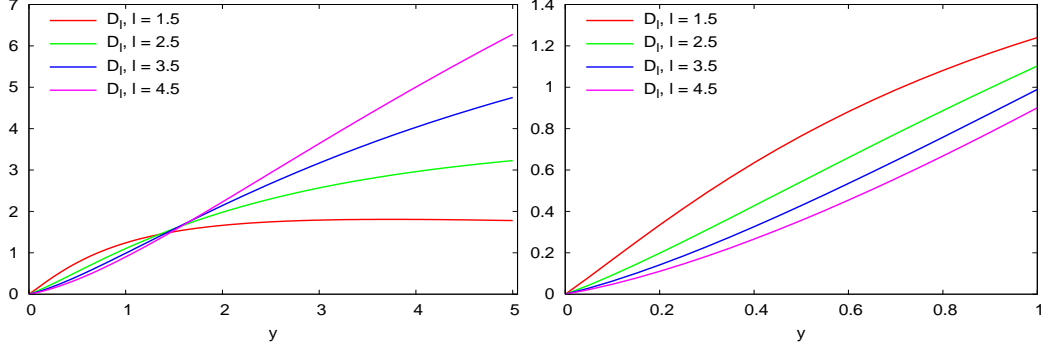


Figure 17: $\frac{d\tilde{D}_g(\ell, y)}{d\ell}$ as a function of y for different values of ℓ .

$$x_1 F_q^{h_1}(x_1, \Theta, E, \Theta_0)^0 \approx \tilde{D}_g(\ell_1, y_1) \left(\langle u \rangle_q^g + \frac{C_F}{N_c} \langle u \rangle_q^q \right) = \frac{\langle C \rangle_q^0}{N_c} \tilde{D}_g(\ell_1, y_1). \quad (\text{B.1})$$

The leading $\langle C \rangle_g^0$ and $\langle C \rangle_q^0$ in (4.14) for a quark and a gluon jet are given respectively by (see [1], chapt. 9⁸)

$$\begin{aligned} \langle C \rangle_q^0 &= \langle C \rangle_\infty - c_1 (N_c - C_F) \left(\frac{\ln(E\Theta/\Lambda_{\text{QCD}})}{\ln(E\Theta_0/\Lambda_{\text{QCD}})} \right)^{(c_3/4N_c\beta)} \\ &= \langle C \rangle_\infty - c_1 (N_c - C_F) \left(\frac{Y_\Theta + \lambda}{Y_{\Theta_0} + \lambda} \right)^{(c_3/4N_c\beta)}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \langle C \rangle_g^0 &= \langle C \rangle_\infty + c_2 (N_c - C_F) \left(\frac{\ln(E\Theta/\Lambda_{\text{QCD}})}{\ln(E\Theta_0/\Lambda_{\text{QCD}})} \right)^{(c_3/4N_c\beta)} \\ &= \langle C \rangle_\infty + c_2 (N_c - C_F) \left(\frac{Y_\Theta + \lambda}{Y_{\Theta_0} + \lambda} \right)^{(c_3/4N_c\beta)}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

with

$$\langle C \rangle_\infty = c_1 N_c + c_2 C_F,$$

$$c_1 = \frac{8}{3} \frac{C_F}{c_3}, \quad c_2 = 1 - c_1 = \frac{2}{3} \frac{n_f}{c_3}, \quad c_3 = \frac{8}{3} C_F + \frac{2}{3} n_f; \quad (\text{B.4})$$

in the r.h.s of (B.2) (B.3) we have used the definitions (2.6) (2.7). $\langle C \rangle_\infty$ corresponds to the limit $E \rightarrow \infty, \Theta \rightarrow 0$.

In practice, we take in this work

$$Q_0 \approx \Lambda_{\text{QCD}} \Leftrightarrow \lambda \approx 0, \quad (\text{B.5})$$

which ensures in particular the consistency with the analytical calculation of the MLLA spectrum (appendix A), which can only be explicitly achieved in this limit.

⁸The coefficient β , omitted in the exponents of eqs. (9.12a), (9.12b), (9.12c) of [1] has been restored here. The factor $4N_c$ is due to our normalization (see the beginning of section 2).

C. Calculation of $\delta\langle C \rangle_g$ and $\delta\langle C \rangle_q$ of section 4

C.1 Explicit expressions for $\langle u \rangle_{A_0}^A$ and $\delta\langle u \rangle_{A_0}^A$ defined in (4.8)

The expressions (4.8) for $\langle u \rangle_{A_0}^A$ and $\delta\langle u \rangle_{A_0}^A$ are conveniently obtained from the Mellin-transformed DGLAP fragmentation functions [1]

$$\mathcal{D}(j, \xi) = \int_0^1 du u^{j-1} D(u, \xi), \quad (\text{C.1})$$

which, if one deals with $D_A^B(u, r^2, s^2)$, depends in reality on the difference $\xi(r^2) - \xi(s^2)$:

$$\xi(Q^2) = \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{\alpha_s(k^2)}{4\pi}, \quad \xi(r^2) - \xi(s^2) \approx \frac{1}{4N_c\beta} \ln \left(\frac{\ln(r^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}{\ln(s^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} \right). \quad (\text{C.2})$$

One has accordingly

$$\langle u \rangle_{A_0}^A = \mathcal{D}_{A_0}^A(2, \xi(E\Theta_0) - \xi(E\Theta)), \quad \delta\langle u \rangle_{A_0}^A = \frac{d}{dj} \mathcal{D}_{A_0}^A(j, \xi(E\Theta_0) - \xi(E\Theta)) \Big|_{j=2}. \quad (\text{C.3})$$

The DGLAP functions $\mathcal{D}(j, \xi)$ are expressed [1] in terms of the anomalous dimensions $\nu_F(j)$, $\nu_G(j)$ and $\nu_{\pm}(j)$, the j dependence of which is in particular known.

For the sake of completeness, we give below the expressions for the $\langle u \rangle$'s and $\delta\langle u \rangle$'s.

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_g^q &= \frac{9}{25} \left(\left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} - 1 \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\ \langle u \rangle_g^g &= 1/25 \left(16 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} + 9 \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\ \langle u \rangle_q^g &= \frac{16}{25} \left(\left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} - 1 \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\ \langle u \rangle_q^{\text{sea}} &= -1/25 \left(-9 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} - 16 + 25 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{2/9} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\ \langle u \rangle^{\text{val}} &= \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{32}{81}}, \\ \langle u \rangle_q^{\text{sea}} + \langle u \rangle^{\text{val}} &= 1/25 \left(9 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} + 16 \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}; \\ \delta\langle u \rangle_g^q &= -\frac{1}{337500} \left(-43011 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} + 43011 - 6804\pi^2 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \right. \\ &\quad \left. + 6804\pi^2 - 48600 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \right. \\ &\quad \left. + 21600 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \pi^2 + 109525 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -17400 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \pi^2 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\
 \delta \langle u \rangle_g^g = & -\frac{1}{337500} \left(-11664 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} + 31104 \pi^2 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \right. \\
 & -86400 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \\
 & +38400 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \pi^2 \\
 & +11664 - 31104 \pi^2 - 109525 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \\
 & \left. +17400 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \pi^2 \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\
 \delta \langle u \rangle_q^g = & -\frac{4}{759375} \left(48114 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} - 48114 - 6804 \pi^2 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \right. \\
 & +6804 \pi^2 - 48600 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \\
 & +21600 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \pi^2 + 109525 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \\
 & \left. -17400 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \pi^2 \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\
 \delta \langle u \rangle_q^{\text{sea}} = & \frac{2}{759375} \left(-13122 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} + 34992 \pi^2 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \right. \\
 & +54675 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \\
 & -24300 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \pi^2 \\
 & +13122 - 34992 \pi^2 + 219050 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) - 34800 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \pi^2 \\
 & -265625 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{2/9} \\
 & \left. +37500 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{2/9} \pi^2 \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}}, \\
 \delta \langle u \rangle^{\text{val}} = & -\frac{2}{243} (-85 + 12 \pi^2) \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{32}{81}}, \\
 \delta \langle u \rangle^{\text{val}} + \delta \langle u \rangle_q^{\text{sea}} = & -\frac{2}{759375} \left(13122 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} - 34992 \pi^2 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -54675 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \\
 & + 24300 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{\frac{50}{81}} \pi^2 - 13122 + 34992 \pi^2 \\
 & - 219050 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) + 34800 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \pi^2 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}} \quad (\text{C.4})
 \end{aligned}$$

When $\Theta \rightarrow \Theta_0$, all $\delta\langle u \rangle$'s vanish, ensuring that the limits $\xi(E\Theta_0) - \xi(E\Theta) \rightarrow 0$ of the $(\langle C \rangle_{A_0}^0 + \delta\langle C \rangle_{A_0})$'s are the same as the ones of the $\langle C \rangle_{A_0}^0$'s.

C.2 $\delta\langle C \rangle_q$ and $\delta\langle C \rangle_g$

They are given in (4.15), and one uses (4.12) such that only ψ_{g,ℓ_1} (see (4.9)) appears. Their full analytical expressions for the $\delta\langle C \rangle$'s are too complicated to be easily written and manipulated.

Using the formulæ of C.1, one gets the approximate results

$$\begin{aligned}
 \delta\langle C \rangle_q \approx & \left(1.4676 - 1.4676 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}} - 3.2510 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \right. \\
 & \left. + 0.5461 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}} \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \right) \psi_{g,\ell_1}(\ell_1, y_1), \quad (\text{C.5})
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 \delta\langle C \rangle_g \approx & \left(-2.1898 + 2.1898 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}} - 3.2510 \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \right. \\
 & \left. - 0.3072 \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right)^{-\frac{50}{81}} \ln \left(\frac{Y_{\Theta_0} + \lambda}{Y_{\Theta} + \lambda} \right) \right) \psi_{g,\ell_1}(\ell_1, y_1). \quad (\text{C.6})
 \end{aligned}$$

The logarithmic derivative $\psi_{g,\ell_1}(\ell_1, y_1)$ (4.9) of the MLLA spectrum $\tilde{D}_g(\ell_1, y_1)$ is obtained from (A.8) of appendix A.

D. At LEP and Tevatron

At LEP energy, the working conditions correspond to $Y_{\Theta_0} \approx 5.2$; they are not very different at the Tevatron where $Y_{\Theta_0} \approx 5.6$. We first present the curves for LEP, then, after the discussion concerning the size of the corrections and the domain of validity of our calculations, we give our predictions for the Tevatron.

D.1 The average color current

Owing to the size of the (MLLA) corrections to the $\langle C \rangle$'s and their y derivatives, we will keep to the lower bound $\ell_1 \geq 2.5$.

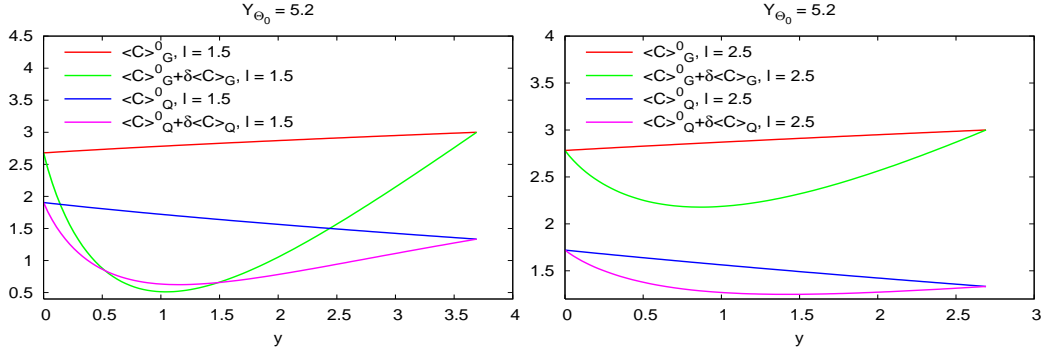


Figure 18: $\langle C \rangle_{A_0}^0$ and $\langle C \rangle_{A_0}^0 + \delta\langle C \rangle_{A_0}$ for quark and gluon jets, as functions of y , for $Y_{\Theta_0} = 5.2$, $\ell = 1.5$ on the left and $\ell = 2.5$ on the right.

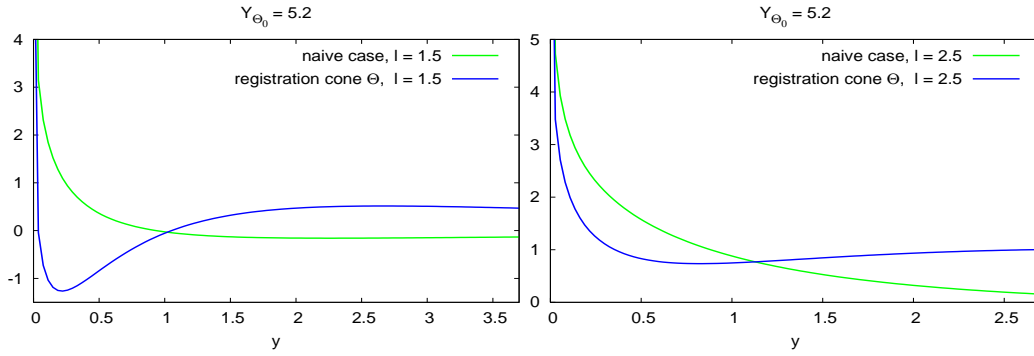


Figure 19: $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ for a gluon jet at fixed ℓ_1 , MLLA and naive approach.

D.2 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ for a gluon jet

We plot below $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ for the two values $\ell = 1.5$ and $\ell = 2.5$.

The excessive size of the $\delta\langle C \rangle$ corrections emphasized in subsection D.1 translates here into the loss of the positivity for $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ at $\ell = 1.5$ for $y < 1$: our approximation is clearly not trustable there.

D.3 $\frac{d^2 N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ for a quark jet

We consider the same two values of ℓ as above.

Like for the gluon jet, we encounter positivity problems at $\ell = 1.5$ for $y < 1.25$.

D.4 $\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ for a gluon jet

We plot below $\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ for a gluon jet obtained by the “naive” approach and including the jet evolution from Θ_0 to Θ ; on the right is an enlargement which shows how positivity is recovered when MLLA corrections are included.

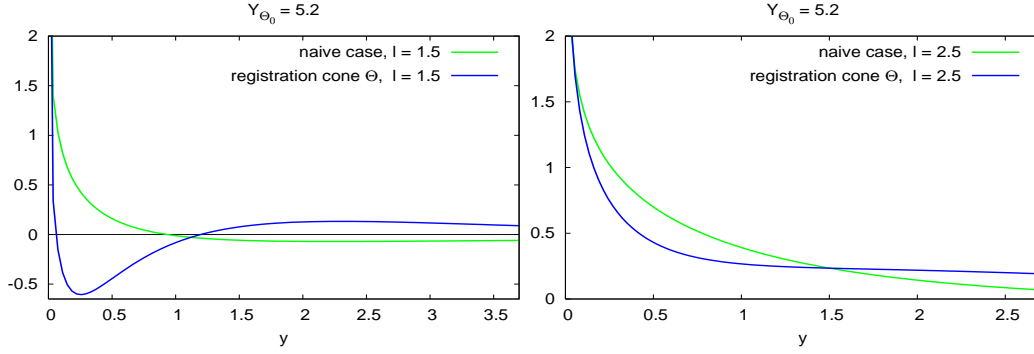


Figure 20: $\frac{d^2 N}{d \ell_1 d \ln k_\perp}$ for a quark jet at fixed ℓ_1 , MLLA and naive approach.

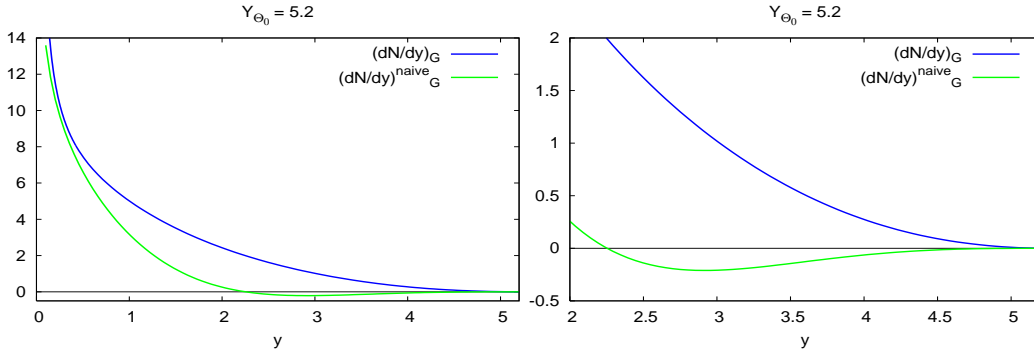


Figure 21: $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$ for a gluon jet, MLLA and naive approach.

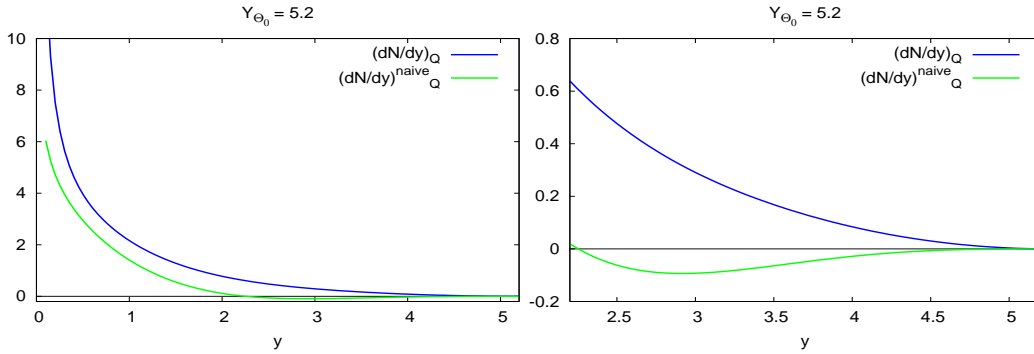


Figure 22: $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$ for a quark jet, MLLA and naive approach.

D.5 $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$ for a quark jet

We proceed like for a gluon jet. The curves below show the restoration of positivity by MLLA corrections.

That the upper bound of the ℓ_1 domain of integration defining $\frac{dN}{d \ln k_\perp}$ corresponds to a large enough $\ell_1 \geq 2.5$ requires that, for LEP, y_1 should be smaller than $5.2 - 2.5 = 2.7$;

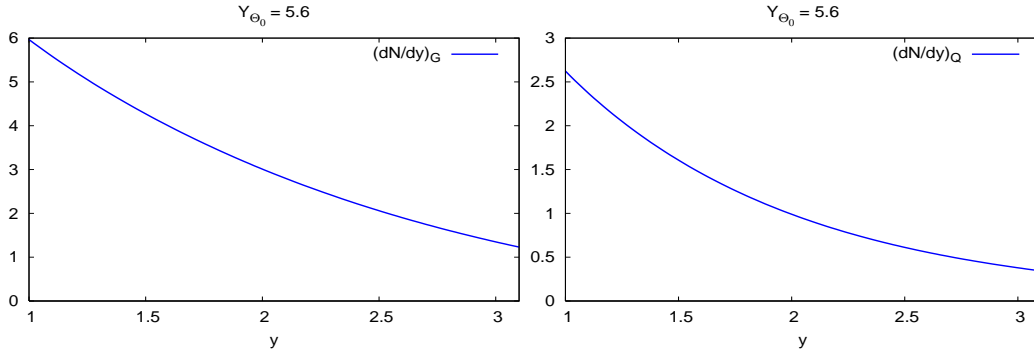


Figure 23: $\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ for a gluon (left) and a quark (right) jets, MLLA predictions for the Tevatron.

combined with the necessity to stay in the perturbative regime, it yields $1 \leq y_1 \leq 2.7$.

D.6 Discussion and predictions for the Tevatron

The similar condition at Tevatron is $1 \leq y_1 \leq 5.6 - 2.5 = 3.1$; like for LEP, it does not extend to large values of k_\perp because, there, the small x approximation is no longer valid. We give below the curves that we predict in this confidence interval.

Since experimental results involve a mixture of gluon and quark jets, the mixing parameter ω (subsection 5.4.1) has to be introduced in the comparison with theoretical curves, together with the phenomenological factor \mathcal{K}^{ch} normalizing partonic to charge hadrons distributions.

E. Comparing DLA and MLLA approximations

DLA [14, 15] and MLLA approximations are very different [1]; in particular, the exact balance of energy (recoil effects of partons) is not accounted for in DLA.

We compare DLA and MLLA results for the two distributions of concern in this work. Studying first their difference for the spectrum itself eases the rest of the comparison.

We choose the two values $Y_{\Theta_0} = 7.5$ and $Y_{\Theta_0} = 15$. While the first corresponds to the LHC working conditions (see footnote 5), the second is purely academic since, taking for example $\Theta_0 \approx .5$ and $Q_0 \approx 250 \text{ MeV}$, it corresponds to an energy of 1635 TeV ; it is however suitable, as we shall see in subsection E.3 to disentangle the effects of coherence and the ones of the divergence of α_s at low energy in the calculation of the inclusive k_\perp distribution.

E.1 The spectrum

Fixing α_s in DLA at the largest scale of the process, the collision energy, enormously damps the corresponding spectrum (it does not take into account the growing of α_s accompanying parton cascading), which gives an unrealistic aspect to the comparison.

This is why, as far as the spectra are concerned, we shall compare their MLLA evaluation with that obtained from the latter by taking to zero the coefficient a given in (A.4),

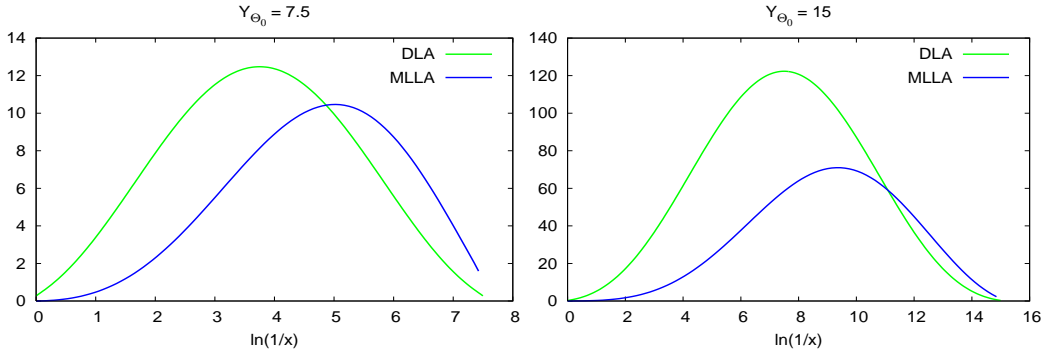


Figure 24: The spectrum $\tilde{D}_g(\ell, Y_{\Theta_0} - \ell)$ for gluon jets; comparison between MLLA and DLA (“with running α_s ”) calculations.

which also entails $B = 0$; $\mathcal{F}_0(\tau, y, \ell)$ in (A.9) becomes $I_0(2\sqrt{Z(\tau, y, \ell)})$. The infinite normalization that occurs in (A.8) because of $\Gamma(B = 0)$ we replace by a constant such that the two calculations can be easily compared. This realizes a DLA approximation (no accounting for recoil effects) “with running α_s ”.

On figure 24 below are plotted the spectrum $\tilde{D}_g(\ell, y \equiv Y_{\Theta_0} - \ell)$ for gluon jets in the MLLA and DLA “with running α_s ” approximations.

The peak of the MLLA spectrum is seen, as expected, to occur at smaller values of the energy than that of DLA.

E.2 Double differential 1-particle inclusive distribution

The genuine MLLA calculations being already shown on figures 3 and 5, figure 25 displays, on the left, a “modified” MLLA calculation obtained by dividing by $\alpha_s(k_\perp^2) \approx \frac{\pi}{2N_c\beta y}$ (see (A.3) with $\lambda \rightarrow 0$); subtracting in the MLLA calculations the dependence on k_\perp due to the running of $\alpha_s(k_\perp^2)$ allows a better comparison with DLA (with fixed α_s) by getting rid of the divergence when $k_\perp \rightarrow Q_0$.

On the right are plotted the DLA results for gluon jets, in which α_s has been fixed at the collision energy (it is thus very small). Since their normalizations are now different, only the *shapes* of the two types of curves must be compared; we indeed observe that the DLA growing of $\frac{d^2N}{d\ell_1 d\ln k_\perp}$ with k_\perp (or y_1) also occurs in the “modified” MLLA curves.

The DLA distribution for quark jets is obtained from that of gluon jets by multiplication by the factor C_F/N_c ; it is thus also a growing function of y_1 .

The MLLA distribution for quark jets, which is, unlike that for gluon jets, a decreasing function of y_1 (see figure 6), becomes, like the latter, growing, after the dependence on $\alpha_s(k_\perp^2)$ has been factored out: one finds the same behavior as in DLA.

E.3 Inclusive k_\perp distribution

On figure 26 we have plotted, at $Y_{\Theta_0} = 7.5$:

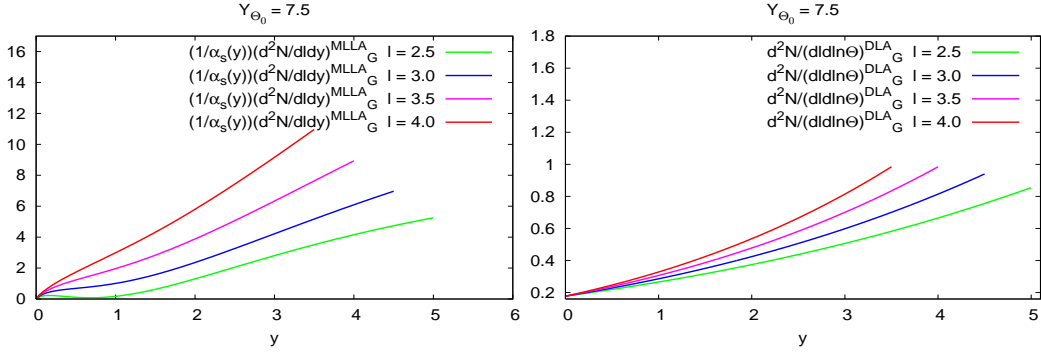


Figure 25: Comparison between MLLA (after dividing by $\alpha_s(k_\perp^2)$, on the left) and DLA calculation with α_s fixed (on the right) of $\frac{d^2N}{dy d\ln k_\perp}$ for gluon jets.

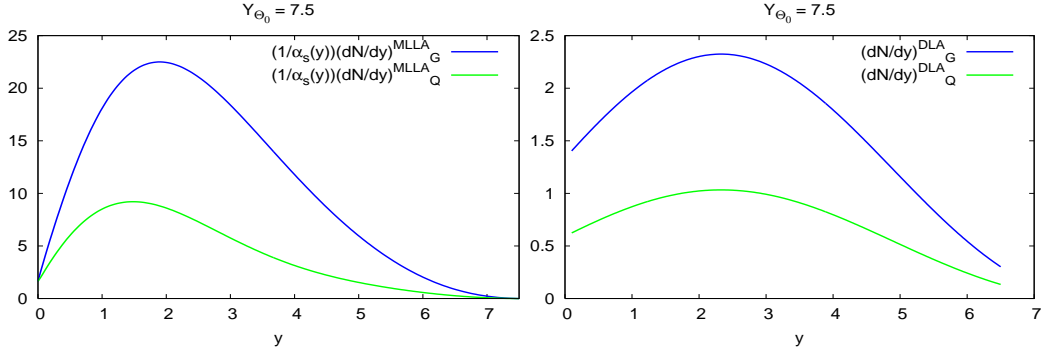


Figure 26: $Y_{\Theta_0} = 7.5$: comparing MLLA and DLA calculations of $\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ (see also figure 7); from left to right: $\frac{1}{\alpha_s(k_T^2)}$ MLLA and DLA (α_s fixed).

- the MLLA calculation of $\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ divided by $\alpha_s(k_\perp^2)$, such that the divergence due to the running of α_s has been factored out, leaving unperturbed the damping due to coherence effects;
- the DLA calculation of $\frac{dN}{d\ln k_\perp}$ with α_s fixed at the collision energy.

Like in E.2, because of the division by α_s , the two curves are not normalized alike, such that only their *shapes* should be compared.

The comparison of the DLA curve (at fixed α_s) with the genuine MLLA calculation displayed in figure 7 (left) shows how different are the outputs of the two approximations; while at large k_\perp they are both decreasing, at small k_\perp the running of α_s makes the sole MLLA distribution diverge when $k_\perp \rightarrow Q_0$ (non-perturbative domain).

In the extremely high domain of energy $Y_{\Theta_0} = 15$ used for figure 27, the two competing phenomena occurring at small y_1 can then be neatly distinguished.

The first plot, showing MLLA results, cleanly separates coherence effects from the running of α_s ; in the second figure we have plotted the MLLA calculation divided by

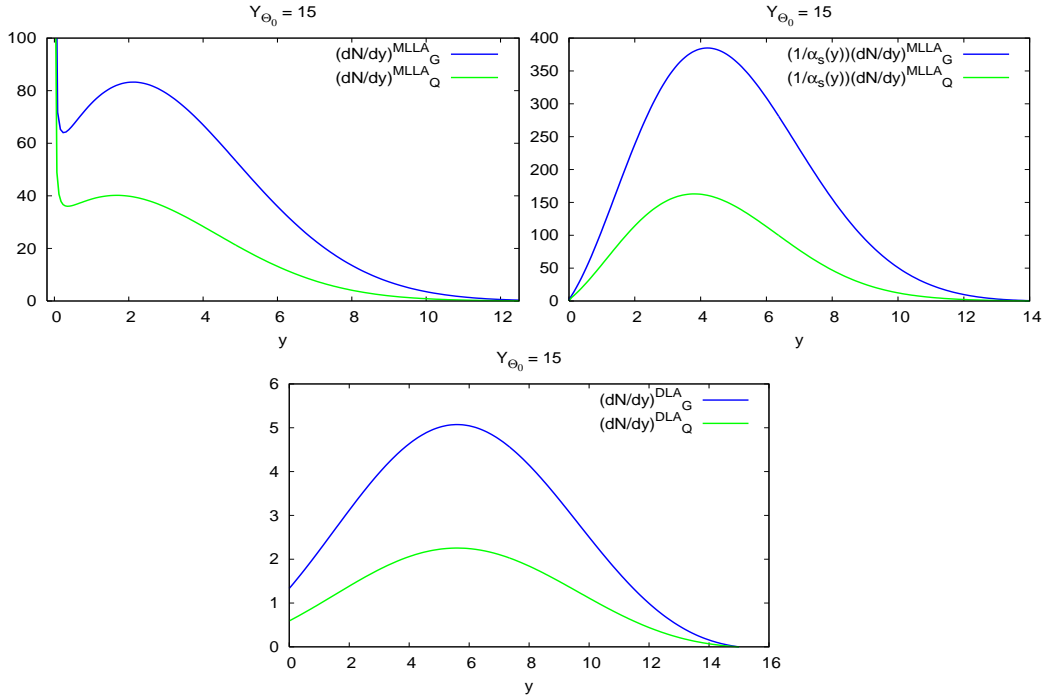


Figure 27: $Y_{\Theta_0} = 15$: comparing MLLA and DLA calculations of $\frac{dN}{d \ln k_{\perp}}$; from left to right: MLLA, $\frac{1}{\alpha_s(k_T^2)}$ MLLA and DLA (α_s fixed).

$\alpha_s(k_{\perp}^2)$: damping at small y_1 due to coherence effects appears now unspoiled; finally, DLA calculations clearly exhibit, too, the damping due to coherence.⁹

The large difference of magnitude observed between the first (genuine MLLA) and the last (DLA) plots occurs because DLA calculations have been performed with α_s fixed at the very high collision energy.

Like in E.2, because of the division by α_s , the second curve is not normalized like the two others, such that only its *shape* should be compared with theirs.

References

- [1] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, A.H. Mueller and S.I. Troyan: *Basics of perturbative QCD*, Editions Frontières, Paris, 1991, and references therein.
- [2] C.P. Fong and B.R. Webber, *Higher order QCD corrections to hadron energy distributions in jets*, *Phys. Lett. B* **229** (1989) 289.
- [3] OPAL collaboration, M.Z. Akrawy et al., *A study of coherence of soft gluons in hadron jets*, *Phys. Lett. B* **247** (1990) 617;

⁹The DLA points corresponding to $y_1 = 0$ can be analytically determined to be $4N_c/n_f$ (gluon jet) and $4C_F/n_f$ (quark jet); they are independent of the energy Y_{Θ_0} .

- JADE collaboration, P. Pfeifenschneider et al., *QCD analyses and determinations of α_s in e^+e^- annihilation at energies between 35 GeV and 189 GeV*, *Eur. Phys. J. C* **17** (2000) 19 [[hep-ex/0001055](#)].
- [4] CDF collaboration, A.A. Affolder et al., *Charged particle multiplicity in jets in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 211804;
CDF collaboration, D. Acosta et al., *Momentum distribution of charged particles in jets in dijet events in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV and comparisons to perturbative QCD predictions*, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 012003.
- [5] H1 collaboration, C. Adloff et al., *Deep-inelastic inclusive ep scattering at low x and a determination of α_s* , *Eur. Phys. J. C* **21** (2001) 33 [[hep-ex/0012053](#)]; *Measurement of inclusive jet cross-sections in deep-inelastic e p scattering at HERA*, *Phys. Lett. B* **542** (2002) 193 [[hep-ex/0206029](#)].
- [6] Y.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, S.I. Troian and A.H. Mueller, *QCD coherence in high-energy reactions*, *Rev. Mod. Phys.* **60** (1988) 373.
- [7] V.A. Khoze and W. Ochs, *Perturbative QCD approach to multiparticle production*, *Int. J. Mod. Phys. A* **12** (1997) 2949 [[hep-ph/9701421](#)].
- [8] R. Perez Ramos, *Two particle correlations in QCD jets*, to appear.
- [9] R. Perez Ramos, *Correlations between two particle in jets*, in *QCD and high energy hadronic interactions*, proceedings of *Rencontres de Moriond*, La Thuile, March 12-19th 2005, E. Auger and J. Tran Thanh Van eds., THE GIOI Publishers.
- [10] Yu.L. Dokshitzer, D.I. Dyakonov and S.I. Troyan: *Inelastic processes in quantum chromodynamics*, SLAC-TRANS-183, translated from Proceedings of 13th Leningrad Winter School 1978; *Hard processes in quantum chromodynamics*, *Phys. Rept.* **58** (1980) 269.
- [11] Yu.L. Dokshitzer and D.I. Dyakonov, *Quantum chromodynamics and hadron jets*, DESY-L-TRANS-234 Jul. 1979. Translated from Proceedings of 14th Leningrad Winter School (1979) p. 27–108.
- [12] H.D. Politzer, *Phys. Rept.* **14C** (1974) 130.
- [13] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, *Deep inelastic e p scattering in perturbation theory*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 438;
 e^+e^- pair annihilation and deep inelastic e p scattering in perturbation theory, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 675;
L.N. Lipatov, *The parton model and perturbation theory*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** (1975) 94;
A.P. Bukhvostov, L.N. Lipatov and N.P. Popov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** (1975) 286;
G. Altarelli and G. Parisi, *Asymptotic freedom in parton language*, *Nucl. Phys. B* **126** (1977) 298;
Y.L. Dokshitzer, *Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics. (In russian)*, *Sov. Phys. JETP* **46** (1977) 641.
- [14] Y.L. Dokshitzer, V.S. Fadin and V.A. Khoze, *On the sensitivity of the inclusive distributions in parton jets to the coherence effects in QCD gluon cascades*, *Z. Physik C* **18** (1983) 37.
- [15] Y.L. Dokshitzer, V.S. Fadin and V.A. Khoze, *Coherent effects in the perturbative QCD parton jets*, *Phys. Lett. B* **115** (1982) 242.
- [16] R. Perez-Ramos and G.P. Salam, in preparation.

- [17] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York and London 1965.
- [18] L.J. Slater and D. Lit, *Confluent hypergeometric functions*, Cambridge University Press, London, New-York 1960.

**C.2 Two-particle correlations inside one jet at “Modified Leading Logarithmic Approximation” of Quantum Chromodynamics ;
I : Exact solution of the evolution equations at small x**

Two-particle correlations inside one jet at “modified leading logarithmic approximation” of quantum chromodynamics

I. Exact solution of the evolution equations at small X

Redamy Perez-Ramos

*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies**

Unité Mixte de Recherche UMR 7589

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6

CNRS

Université Denis Diderot-Paris 7

E-mail: perez@lpthe.jussieu.fr

ABSTRACT: We discuss correlations between two particles in jets at high energy colliders and exactly solve the MLLA evolution equations in the small x limit. We thus extend the Fong-Webber analysis to the region away from the hump of the single inclusive energy spectrum. We give our results for LEP, Tevatron and LHC energies, and compare with existing experimental data.

KEYWORDS: QCD, Jets.

*LPTHE, tour 24-25, 5^{ème} étage, Université P. et M. Curie, BP 126, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 (France).

Contents

1. Introduction	2
2. Evolution equations for jet generating functionals	4
2.1 Inclusive particle energy spectrum	6
2.2 Two-parton correlations	9
2.2.1 Equations	9
3. Soft particle approximation	10
3.1 MLLA spectrum	10
3.2 MLLA correlation	13
4. Two-particle correlation in a gluon jet	15
4.1 Iterative solution	15
4.2 Magnitude estimate of various contributions	16
4.3 MLLA reduction of (4.2)	17
4.4 $\mathcal{C}_g \geq 0$ in the soft approximation	17
4.5 The sign of $(\mathcal{C}_g - 1)$	18
5. Two-particle correlations in a quark jet	18
5.1 Iterative solution	18
5.2 MLLA reduction of (5.2)	19
5.3 $\mathcal{C}_q \geq 0$ in the soft approximation	20
5.4 The sign of $(\mathcal{C}_q - 1)$	20
6. Numerical results	20
6.1 The gluon jet correlator	21
6.2 The quark jet correlator	21
6.3 The role of corrections; summary of appendix E	22
6.4 Results for LEP-I	22
6.4.1 Comments	22
6.5 Comparison with the data from LEP-I	24
6.6 Comparing with the Fong-Webber approximation	26
6.7 Predictions for Tevatron and LHC	26
6.7.1 Comments	27
6.8 Asymptotic behavior of $\mathcal{C}_{g \text{ or } q}$	28
7. Conclusion	29
A. Derivation of the gluon correlator \mathcal{C}_g in (4.2)	30

B. Derivation of the quark correlator \mathcal{C}_q in (5.2)	31
B.1 Derivation of (5.2)	31
B.2 Expressing $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\delta}_1$ and $\tilde{\delta}_2$ in terms of gluon-related quantities	32
B.2.1 Expression for $\tilde{\Delta}$	32
B.2.2 Expression for $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$	32
C. DLA inspired solution of the MLLA evolution equations for the inclusive spectrum	33
D. Exact solution of the MLLA evolution equation for the inclusive spectrum	34
D.1 Limiting spectrum, $\lambda = 0$	35
D.2 Logarithmic derivatives of the spectrum, $\lambda = 0$	37
D.3 Double derivatives	38
E. Numerical analysis of corrections	39
E.1 Gluon jet	39
E.1.1 ψ and its derivatives	39
E.1.2 $\Delta(\ell_1, \ell_2, Y)$	39
E.1.3 Υ_g and its derivatives	40
E.1.4 $\delta_1, \delta_2, \delta_c$	42
E.1.5 The global role of corrections in the iterative procedure	43
E.2 Quark jet	44
E.2.1 φ and its derivatives	44
E.2.2 $\tilde{\Delta}(\ell_1, \ell_2, Y)$	44
E.2.3 Υ_q and its derivatives	45
E.2.4 $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ and $\tilde{\delta}_c$	45
E.2.5 Global role of corrections in the iterative procedure	46
F. Comparing DLA and MLLA correlations	46

1. Introduction

Perturbative QCD (pQCD) successfully predicts inclusive energy spectra of particles in jets. To this end it was enough to make one step beyond the leading “Double Logarithmic Approximation” (DLA) which is known to overestimate soft gluon multiplication, and to describe parton cascades with account of first sub-leading single logarithmic (SL) effects. Essential SL corrections to DLA arise from:

- the running coupling $\alpha_s(k_\perp^2)$;
- decays of a parton into two with comparable energies, $z \sim 1$ (the so called “hard corrections”, taken care of by employing exact DGLAP [1] splitting functions);

- kinematical regions of successive parton decay angles of the same order of magnitude, $\Theta_{i+1} \sim \Theta_i$. The solution to the latter problem turned out to be extremely simple, namely the replacement of the *strong* angular ordering (AO), $\Theta_{i+1} \ll \Theta_i$, imposed by gluon coherence in DLA, by the *exact* AO condition $\Theta_{i+1} \leq \Theta_i$ (see [2] and references therein). The corresponding approximation is known as MLLA (Modified Leading Logarithm Approximation) and embodies the next-to-leading correction, of order γ_0^2 , to the parton evolution “Hamiltonian”, $\gamma_0 \propto \sqrt{\alpha_s}$ being the DLA multiplicity anomalous dimension [2].

So doing, single inclusive charged hadron spectra (dominated by pions) were found to be mathematically similar to that of the MLLA parton spectrum, with an overall proportionality coefficient \mathcal{K}^{ch} normalizing partonic distributions to the ones of charged hadrons; \mathcal{K}^{ch} depends neither on the jet hardness nor on the particle energy. This finding was interpreted as an experimental confirmation of the Local Parton-Hadron Duality hypothesis (LPHD) (for a review see [3, 4] and references therein). However, in the ratio of two-particle distribution and the product of two single particle distributions that determine the correlation, this non-perturbative parameter cancels. Therefore, one expects this observable to provide a more stringent test of parton dynamics. At the same time, it constitutes much harder a problem for the naive perturbative QCD (pQCD) approach.

The correlation between two soft gluons was tackled in DLA in [5]. The first realistic prediction with account of next-to-leading (SL) effects was derived by Fong and Webber in 1990 [6]. They obtained the expression for the two-particle correlator in the kinematical region where both particles were close in energy to the maximum (“hump”) of the single inclusive distribution. In [7] this pQCD result was compared with the OPAL e^+e^- annihilation data at the Z^0 peak: the analytical calculations were found to have largely overestimated the measured correlations.

In this paper we use the formalism of jet generating functionals [8] to derive the MLLA evolution equations for particle correlators (two particle inclusive distributions). We then use the soft approximation for the energies of the two particles by neglecting terms proportional to powers of $x_1, x_2 \ll 1$ (x is the fraction of the jet energy carried away by the corresponding particle). Thus simplified, the evolution equations can be solved iteratively and their solutions are given explicitly in terms of logarithmic derivatives of single particle distributions.

This allows us to achieve two goals. First, we generalize the Fong-Webber result by extending its domain of application to the full kinematical range of soft particle energies. Secondly, by doing this, we follow the same logic as was applied in describing inclusive spectra, namely treating *exactly approximate* evolution equations. Strictly speaking, such a solution, when formally expanded, inevitably bears sub-sub-leading terms that exceed the accuracy with which the equations themselves were derived. This logic, however, was proved successful in the case of single inclusive spectra [9], which demonstrated that MLLA equations, though approximate, fully take into account essential physical ingredients of parton cascading: energy conservation, coherence, running coupling constant. Applying the same logic to double inclusive distributions should help to elucidate the problem of particle correlations in QCD jets.

The paper is organized as follows.

- in section 2 we recall the formalism of jet generating functionals and their evolution equations; we specialize first to inclusive energy spectrum, and then to 2-particle correlations;
- in section 3, we solve exactly the evolution equations in the low energy (small x) limit; how various corrections are estimated and controlled is specially emphasized;
- section 4 is dedicated to correlations in a gluon jet; the equation to be solved iteratively is exhibited, and an estimate of the order of magnitudes of various contributions is given;
- section 5 is dedicated to correlations in a quark jet, and follows the same lines as section 4;
- in section 6 we give all numerical results, for LEP-I, Tevatron and LHC. They are commented, compared with Fong-Webber for OPAL, but all detailed numerical investigations concerning the size of various corrections is postponed, for the sake of clarity, to appendix E;
- a conclusion summarizes this work.

Six appendices provide all necessary theoretical demonstrations and numerical investigations.

- in appendix A and B we derive the exact solution of the evolution equations for the gluon and quark jet correlators;
- appendix C is a technical complement to subsection 4.2;
- in appendix D we demonstrate the exact solution of the MLLA evolution equation for the inclusive spectrum and give analytic expressions for its derivatives;
- appendix E is dedicated to a numerical analysis of all corrections that occur in the iterative solutions of the evolution equations;
- in appendix F we perform a comparison between DLA and MLLA correlators.

2. Evolution equations for jet generating functionals

Consider (see figure 1) a jet generated by a parton of type A (quark or gluon) with 4-momentum $p = (p_0 \equiv E, \vec{p})$.

A generating functional $Z(E, \Theta; \{u\})$ can be constructed [8], which describes the azimuth averaged parton content of a jet of energy E with a given opening half-angle Θ ; by

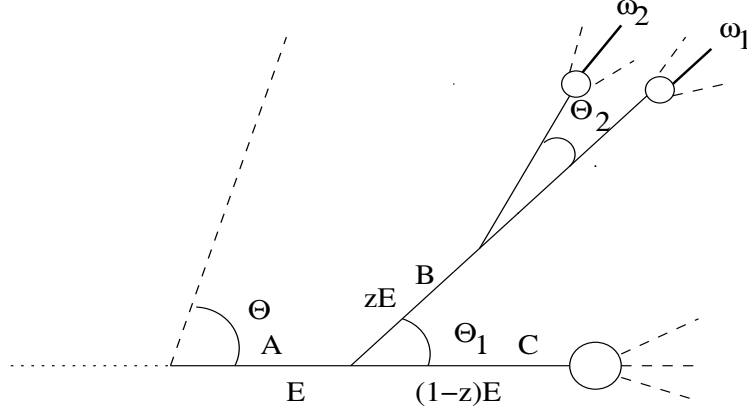


Figure 1: Two-particle correlations and Angular Ordering

virtue of the exact angular ordering (MLLA), it satisfies the following integro-differential evolution equation [2]

$$\frac{d}{d \ln \Theta} Z_A(p, \Theta; \{u\}) = \frac{1}{2} \sum_{B,C} \int_0^1 dz \Phi_A^{B[C]}(z) \frac{\alpha_s(k_\perp^2)}{\pi} \left(Z_B(zp, \Theta; \{u\}) Z_C((1-z)p, \Theta; \{u\}) - Z_A(p, \Theta; \{u\}) \right); \quad (2.1)$$

in (2.1), z and $(1-z)$ are the energy-momentum fractions carried away by the two offspring of the $A \rightarrow BC$ parton decay described by the standard one loop splitting functions

$$\Phi_q^{q[g]}(z) = C_F \frac{1+z^2}{1-z}, \quad \Phi_q^{g[q]}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad (2.2)$$

$$\Phi_g^{q[\bar{q}]}(z) = T_R (z^2 + (1-z)^2), \quad \Phi_g^{g[g]}(z) = 2C_A \left(\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z) \right), \quad (2.3)$$

$$C_A = N_c, \quad C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c, \quad T_R = 1/2, \quad (2.4)$$

where N_c is the number of colors; Z_A in the integral in the r.h.s. of (2.1) accounts for 1-loop virtual corrections, which exponentiate into Sudakov form factors.

$\alpha_s(q^2)$ is the running coupling constant of QCD

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{4N_c \beta \ln \frac{q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}}, \quad (2.5)$$

where $\Lambda_{\text{QCD}} \approx$ a few hundred MeV 's is the intrinsic scale of QCD, and

$$\beta = \frac{1}{4N_c} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{4}{3} n_f T_R \right) \quad (2.6)$$

is the first term in the perturbative expansion of the β function, n_f the number of light quark flavors.

If the radiated parton with 4-momentum $k = (k_0, \vec{k})$ is emitted with an angle Θ with respect to the direction of the jet, one has (k_\perp is the modulus of the transverse trivector \vec{k}_\perp orthogonal to the direction of the jet) $k_\perp \simeq |\vec{k}|\Theta \approx k_0\Theta \approx zE\Theta$ when $z \ll 1$ or $(1-z)E\Theta$ when $z \rightarrow 1$, and a collinear cutoff $k_\perp \geq Q_0$ is imposed.

In (2.1) the symbol $\{u\}$ denotes a set of *probing functions* $u_a(k)$ with k the 4-momentum of a secondary parton of type a . The jet functional is normalized to the total jet production cross section such that

$$Z_A(p, \Theta; u \equiv 1) = 1; \quad (2.7)$$

for vanishingly small opening angle it reduces to the probing function of the single initial parton

$$Z_A(p, \Theta \rightarrow 0; \{u\}) = u_A(k \equiv p). \quad (2.8)$$

To obtain *exclusive* n -particle distributions one takes n variational derivatives of Z_A over $u(k_i)$ with appropriate particle momenta, $i = 1 \dots n$, and sets $u \equiv 0$ after wards; *inclusive* distributions are generated by taking variational derivatives around $u \equiv 1$.

2.1 Inclusive particle energy spectrum

The probability of soft gluon radiation off a color charge (moving in the z direction) has the polar angle dependence

$$\frac{\sin \theta d\theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \simeq \frac{d\theta}{\theta};$$

therefore, we choose the angular evolution parameter to be

$$Y = \ln \frac{2E \sin(\Theta/2)}{Q_0} \Rightarrow dY = \frac{d \sin(\Theta/2)}{\sin(\Theta/2)}; \quad (2.9)$$

this choice accounts for finite angles $\mathcal{O}(1)$ up to the full opening half-angle $\Theta = \pi$, at which

$$Y_{\Theta=\pi} = \ln \frac{2E}{Q_0},$$

where $2E$ is the center-of-mass annihilation energy of the process $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. For small angles (2.9) reduces to

$$Y \simeq \ln \frac{E\Theta}{Q_0}, \quad \Theta \ll 1, \quad \frac{d}{dY} = \frac{d}{d \ln \Theta}, \quad (2.10)$$

where $E\Theta$ is the maximal transverse momentum of a parton inside the jet with opening half-angle Θ .

To obtain the inclusive energy distribution of parton a emitted at angles smaller than Θ with momentum k_a , energy $E_a = xE$ in a jet A , i.e. the fragmentation function $D_A^a(x, Y)$, we take the variational derivative of (2.1) over $u_a(k)$ and set $u \equiv 1$ (which also corresponds to $Z = 1$) according to

$$xD_A^a(x, Y) = E_a \frac{\delta}{\delta u(k_a)} Z_A(k, \Theta; \{u\}) \Big|_{u=1}, \quad (2.11)$$

where we have chosen the variables x and Y rather than k_a and Θ .

Two configurations must be accounted for: B carrying away the fraction z and C the fraction $(1 - z)$ of the jet energy, and the symmetric one in which the role of B and C is exchanged. Upon functional differentiation they give the same result, which cancels the factor $1/2$. The system of coupled linear integro-differential equations that comes out is

$$\frac{d}{dY} xD_A^a(x, Y) = \int_0^1 dz \sum_B \Phi_A^B(z) \frac{\alpha_s}{\pi} \left[\frac{x}{z} D_B^a\left(\frac{x}{z}, Y + \ln z\right) - \frac{1}{2} xD_A^a(x, Y) \right]. \quad (2.12)$$

We will be interested in the region of small x where fragmentation functions behave as

$$xD(x) \stackrel{x \ll 1}{\sim} \rho(\ln x), \quad (2.13)$$

with ρ a smooth function of $\ln x$. Introducing logarithmic *parton densities*

$$Q = xD_Q^a(x, Y), \quad G = xD_G^a(x, Y), \quad (2.14)$$

respectively for quark and gluon jets, we obtain from (2.12)

$$Q_y \equiv \frac{dQ}{dy} = \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_q^g(z) \left[\left(Q(1 - z) - Q \right) + G(z) \right], \quad (2.15)$$

$$G_y \equiv \frac{dG}{dy} = \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \left[\Phi_g^g(z) \left(G(z) - zG \right) + n_f \Phi_g^q(z) \left(2Q(z) - G \right) \right], \quad (2.16)$$

where, for the sake of clarity, we have suppressed x and Y and only kept the dependence on the integration variable z , e.g.,

$$G(z) \equiv \frac{x}{z} D_G^a\left(\frac{x}{z}, Y + \ln z\right), \quad (2.17)$$

such that

$$G = G(1), \quad Q = Q(1). \quad (2.18)$$

Some comments are in order concerning these equations.

- We chose to express the derivative with respect to the jet opening angle Θ on the l.h.s. of equations (2.15) (2.16) in terms of

$$y \equiv Y - \ell = \ln \frac{x E \Theta}{Q_0} = \ln \frac{E_a \Theta}{Q_0}, \quad \ell \equiv \ln \frac{1}{x} = \ln \frac{E}{E_a}, \quad (2.19)$$

instead of Y defined in (2.9). The variable y is convenient for imposing the collinear cutoff condition $k_\perp \simeq x E \sin \theta \geq Q_0$ since, for small angles, it translates simply into $y \geq 0$;

- to obtain (2.15) one proceeds as follows. When B is a quark in (2.12), since A is also a quark, one gets two contributions: the real contribution $D_{B=q}^a$ and the virtual one $-\frac{1}{2} D_{A=q}^a$;
 – in the virtual contribution, since $\Phi_q^g(z) = \Phi_q^g(1 - z)$, the sum over B cancels the factor $1/2$;

- in the real contribution, when it is a quark, it is associated with $\Phi_q^g(z)$ and, when it is a gluon, with $\Phi_g^g(z)$; we use like above the symmetry $\Phi_q^g(z) = \Phi_q^g(1-z)$ to only keep one of the two, namely Φ_q^g , at the price of changing the corresponding $D(z)$ into $D(1-z)$;
- to obtain (2.16), one goes along the following steps; now $A = g$ and $B = q$ or g ;
 - as before, the subtraction term does not depend on B and is summed over $B = q$ and $B = g$, with the corresponding splitting functions Φ_q^g and Φ_g^g . In the term Φ_g^g , using the property $\Phi_g^g(z) = \Phi_g^g(1-z)$ allows us to replace $\frac{1}{2} \int_0^1 dz \Phi_g^g(z) = \int_0^1 z \Phi_g^g(z)$. This yields upon functional differentiation the $-zG$ term in (2.16). For $B = q$, $2n_f$ flavors (n_f flavors of quarks and n_f flavors of anti-quarks) yield identical contributions, which, owing to the initial factor $1/2$ finally yields n_f ;
 - concerning the real terms, $\Phi_g^g G$ in (2.16) comes directly from $\Phi_g^g \frac{x}{z} D_g^a$ in (2.12). For $B = q$, $2n_f$ flavors of quarks and antiquarks contribute equally since at $x \ll 1$ sea quarks are produced via gluons.¹ This is why we have multiplied $Q(z)$ by $2n_f$ in (2.16).

Now we recall that both splitting functions $\Phi_q^g(z)$ and Φ_g^g are singular at $z = 0$; the symmetric gluon-gluon splitting $\Phi_g^g(z)$ is singular at $z = 1$ as well. The latter singularity in (2.16) gets regularized by the factor $(G(z) - zG)$ which vanishes at $z \rightarrow 1$. This regularization can be made explicit as follows

$$\int_0^1 dz \Phi_g^g(z) (G(z) - zG) \equiv \int_0^1 dz \Phi_g^g(z) [(1-z)G(z) + z(G(z) - G)];$$

since $\Phi_g^g(z) = \Phi_g^g(1-z)$, while leaving the first term $\int_0^1 dz \Phi_g^g(z)(1-z)G(z)$ unchanged, we can rewrite the second

$$\int_0^1 dz \Phi_g^g(z) z(G(z) - G) = \int_0^1 dz \Phi_g^g(z)(1-z)(G(1-z) - G),$$

such that, re-summing the two, $(1-z)$ gets factorized and one gets

$$\int_0^1 dz \Phi_g^g(z) (G(z) - zG) = \int_0^1 dz \Phi_g^g(z)(1-z) [G(z) + (G(1-z) - G)] \quad (2.20)$$

Terms proportional to $G(z)$ on r.h.s. of equations (2.15) (2.16) remain singular at $z \rightarrow 0$ and produce enhanced contributions due to the logarithmic integration over the region $x \ll z \ll 1$.

Before discussing the MLLA evolution equations following from (2.15) and (2.16), let us derive similar equation for two particle correlations inside one jet.

¹ Accompanied by a relatively small fraction $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha_s})$ of (flavor singlet) sea quark pairs, while the valence (non-singlet) quark distributions are suppressed as $\mathcal{O}(x)$.

2.2 Two-parton correlations

We study correlation between two particles with fixed energies $x_1 = \omega_1/E$, $x_2 = \omega_2/E$ ($x_1 > x_2$) emitted at arbitrary angles Θ_1 and Θ_2 smaller than the jet opening angle Θ . If these partons are emitted in a cascading process, then $\Theta_1 \geq \Theta_2$ by the AO property; see figure 1.

2.2.1 Equations

Taking the second variational derivative of (2.1) with respect to $u(k_1)$ and $u(k_2)$, one gets a system of equations for the two-particle distributions $G^{(2)}$ and $Q^{(2)}$ in gluon and quark jets, respectively:

$$Q_y^{(2)} = \int dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_q^g(z) \left[G^{(2)}(z) + \left(Q^{(2)}(1-z) - Q^{(2)} \right) + G_1(z)Q_2(1-z) + G_2(z)Q_1(1-z) \right], \quad (2.21)$$

$$G_y^{(2)} = \int dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_g^g(z) \left[\left(G^{(2)}(z) - zG^{(2)} \right) + G_1(z)G_2(1-z) \right] + \int dz \frac{\alpha_s}{\pi} n_f \Phi_g^q(z) \left[\left(2Q^{(2)}(z) - G^{(2)} \right) + 2Q_1(z)Q_2(1-z) \right]. \quad (2.22)$$

As before, the notations have been lightened to a maximum, such that $Q^{(2)} = Q^{(2)}(z = 1)$, $G^{(2)} = G^{(2)}(z = 1)$. More details about the variables on which $Q^{(2)}$ depends are given in subsection 3.2. Now using (2.15) we construct the y -derivative of the product of single inclusive spectra. Symbolically,

$$(Q_1 Q_2)_y = Q_2 \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_q^g(x) \left[(Q_1(1-z) - Q_1) + G_1(z) \right] + Q_1 \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_q^g(x) \left[(Q_2(1-z) - Q_2) + G_2(z) \right]. \quad (2.23)$$

Subtracting this expression from (2.21) we get

$$(Q^{(2)} - Q_1 Q_2)_y = \int dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_q^g(z) \left[G^{(2)}(z) + \left(Q^{(2)}(1-z) - Q^{(2)} \right) + (G_1(z) - Q_1)(Q_2(1-z) - Q_2) + (G_2(z) - Q_2)(Q_1(1-z) - Q_1) \right]. \quad (2.24)$$

For the gluon jet, making use of (2.16) we analogously obtain from (2.22)

$$(G^{(2)} - G_1 G_2)_y = \int dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_g^g(z) \left[\left(G^{(2)}(z) - zG^{(2)} \right) + (G_1(z) - G_1)(G_2(1-z) - G_2) \right] + \int dz \frac{\alpha_s}{\pi} n_f \Phi_g^q(z) \left[2 \left(Q^{(2)}(z) - Q_1(z)Q_2(z) \right) - \left(G^{(2)} - G_1 G_2 \right) + (2Q_1(z) - G_1)(2Q_2(1-z) - G_2) \right]. \quad (2.25)$$

The combinations on the l.h.s. of (2.24) and (2.25) form *correlation functions* which vanish when particles 1 and 2 are produced independently. They represent the combined probability of emitting particle 2 with ℓ_2, y_2, \dots when particle 1 with ℓ_1, y_1, \dots is emitted, too. This way of representing the r.h.s. of the equations is convenient for estimating the magnitude of the various terms.

3. Soft particle approximation

In the standard DGLAP region $x = \mathcal{O}(1)$ ($\ell = \mathcal{O}(0)$), the x dependence of parton distributions is fast while scaling violation is small

$$\frac{\partial_\ell D_{G,Q}(\ell, y)}{D_{G,Q}} \equiv \psi_\ell = \mathcal{O}(1), \quad \frac{\partial_y D_{G,Q}(\ell, y)}{D_{G,Q}} \equiv \psi_y = \mathcal{O}(\alpha_s). \quad (3.1)$$

With x decreasing, the running coupling gets enhanced while the x -dependence slows down so that, in the kinematical region of the *maximum* (“hump”) of the inclusive spectrum the two logarithmic derivatives become of the same order:

$$\psi_y \sim \psi_\ell = \mathcal{O}(\sqrt{\alpha_s}), \quad y \simeq \ell \simeq \frac{1}{2}Y. \quad (3.2)$$

This allows to significantly simplify the equations for inclusive spectra (2.15) (2.16) and two-particle correlations (2.24) (2.25) for soft particles, $x_i \ll 1$, which determine the bulk of parton multiplicity in jets. We shall estimate various contributions to evolution equations in order to single out the leading and first sub-leading terms in $\sqrt{\alpha_s}$ to construct the MLLA equations.

3.1 MLLA spectrum

We start by recalling the logic of the MLLA analysis of the inclusive spectrum. In fact (2.15) (2.16) are identical to the DGLAP evolution equations but for one detail: the shift $\ln z$ in the variable Y characterizing the evolution of the jet hardness Q . Being the consequence of exact angular ordering, this modification is negligible, within leading log accuracy in $\alpha_s Y$, for energetic partons when $|\ln z| < |\ln x| = \mathcal{O}(1)$. For soft particles, however, ignoring this effect amounts to corrections of order $\mathcal{O}((\alpha_s \ln^2 x)^n)$ that drastically modify the character of the parton yield in time-like jets as compared with space-like deep inelastic scattering (DIS) parton distributions.

The MLLA logic consists in keeping the leading term and the first next-to-leading term in the right hand sides of evolution equations (2.15) (2.16). Meanwhile, the combinations $(Q(1-z) - Q)$ in (2.15) and $(G(1-z) - G)$ in (2.20) produce next-to-MLLA corrections that can be omitted; indeed, in the small- x region the parton densities $G(x)$ and $Q(x)$ are smooth functions (see 2.13) of $\ln x$ and we can estimate, say, $G(1-z) - G$, using (2.13), as

$$G(1-z) - G \equiv G\left(\frac{x}{1-z}, Y + \ln(1-z)\right) - G(x, Y) \simeq \psi_\ell G \ln(1-z).$$

Since $\psi_\ell \sim \sqrt{\alpha_s}$ (see 4.11), combined with α_s this gives a next-to-MLLA correction $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$ to the r.h.s. of (2.16). Neglecting these corrections we arrive at

$$Q_y = \int_x^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_q^g(z) G(z), \quad (3.3)$$

$$G_y = \int_x^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \left[(1-z) \Phi_g^g(z) G(z) + n_f \Phi_g^q(z) (2Q(z) - G) \right]. \quad (3.4)$$

To evaluate (3.3), we rewrite (see (2.2))

$$\Phi_q^g(z) = C_F \left(\frac{2}{z} + z - 2 \right);$$

the singularity in $1/z$ yields the leading (DLA) term; since $G(z)$ is a smoothly varying function of $\ln z$ (see (2.13) (2.14)), the main z dependence of this non-singular part of the integrand we only slightly alter by replacing $(z-2)G(z)$ by $(z-2)G$, which yields²

$$Q_y = \int_x^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left(\frac{2}{z} G(z) + (z-2)G \right) = \frac{C_F}{N_c} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G(z) - \frac{3}{4} \frac{C_F}{N_c} \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G \quad (3.5)$$

where $\alpha_s = \alpha_s(\ln z)$ in the integral term while in the second, it is just a constant. To get the last term in (3.5) we used

$$\int_0^1 dz (z-2) = -\frac{3}{2}. \quad (3.6)$$

To evaluate (3.4) we go along similar steps. Φ_g^q being a regular function of z , we replace $2Q(z) - G$ with $2Q - G$; $\Phi_g^q(z)$ also reads (see (2.2))

$$\Phi_g^q(z) = 2C_A \left(\frac{1}{z(1-z)} - 2 + z(1-z) \right);$$

the singularity in $1/(1-z)$ disappears, the one in $1/z$ we leave unchanged, and in the regular part we replace $G(z)$ with G . This yields

$$\begin{aligned} G_y &= \int_x^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \left[2C_A \left(\frac{1}{z} G(z) + (1-z)(-2 + z(1-z))G \right) \right. \\ &\quad \left. + n_f T_R (z^2 + (1-z)^2)(2Q - G) \right] \\ &= 2C_A \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s}{\pi} G(z) - \left(\frac{11}{6} C_A + \frac{2}{3} n_f T_R \right) \frac{\alpha_s}{\pi} G + \frac{4}{3} n_f T_R \frac{\alpha_s}{\pi} Q; \end{aligned} \quad (3.7)$$

the comparison of the singular leading (DLA) terms of (3.5) and (3.7) shows that

$$Q \stackrel{DLA}{=} \frac{C_F}{C_A} G, \quad (3.8)$$

which one uses to replace Q accordingly, in the last (sub-leading) term of (3.7) (the corrections would be next-to-MLLA (see 3.16) and can be neglected). This yields the MLLA equation for G where we set $C_A = N_c$:

$$G_y = \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G(z) - a \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G \quad (3.9)$$

with

$$a = \frac{11}{12} + \frac{n_f T_R}{3N_c} \left(1 - \frac{2C_F}{N_c} \right) = \frac{1}{4N_c} \left[\frac{11}{3} N_c + \frac{4}{3} n_f T_R \left(1 - \frac{2C_F}{N_c} \right) \right] \stackrel{n_f=3}{=} 0.935. \quad (3.10)$$

²Since $x \ll 1$, the lower bound of integration is set to “0” in the sub-leading pieces of (3.3) and (3.4).

a parametrizes “hard” corrections to soft gluon multiplication and sub-leading $g \rightarrow q\bar{q}$ splittings.³

We conveniently define the integration variables z and Θ' satisfying $x \leq z \leq 1$ and $xE/Q_0 \leq \Theta' \leq \Theta$ through⁴

$$\ell' = \ln \frac{z}{x} \quad \text{and} \quad y' = \ln \frac{xE\Theta'}{Q_0} \quad (3.11)$$

The condition $x \leq z \leq 1$ is then equivalent to $0 \leq \ell' \leq \ell$ and $xE/Q_0 \leq \Theta' \leq \Theta$ is $0 \leq y' \leq y$. Therefore,

$$\int_x^1 \frac{dz}{z} = \int_0^\ell d\ell', \quad \int_{Q_0/xE}^\Theta \frac{d\Theta'}{\Theta'} = \int_0^y dy'.$$

We end up with the following system of integral equations of (3.5) and (3.9) for the spectrum of one particle inside a quark and a gluon jet

$$Q(\ell, y) = \delta(\ell) + \frac{C_F}{N_c} \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' \gamma_0^2(\ell' + y') \left(1 - \frac{3}{4}\delta(\ell' - \ell)\right) G(\ell', y'), \quad (3.12)$$

$$G(\ell, y) = \delta(\ell) + \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' \gamma_0^2(\ell' + y') (1 - a\delta(\ell' - \ell)) G(\ell', y') \quad (3.13)$$

that we write in terms of the anomalous dimension

$$\gamma_0 = \gamma_0(\alpha_s) = \sqrt{\frac{2N_c\alpha_s}{\pi}} \quad (3.14)$$

which determines the rate of multiplicity growth with energy. Indeed, using (2.5), (2.19) and (3.14) one gets

$$\gamma_0^2(zE\Theta') = \frac{1}{\beta \ln\left(\frac{zE\Theta'}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)} = \frac{1}{\beta \left(\ln \frac{z}{x} + \frac{xE\Theta'}{Q_0} + \lambda\right)} \equiv \gamma_0^2(\ell' + y') = \frac{1}{\beta(\ell' + y' + \lambda)}.$$

with $\lambda = \ln(Q_0/\Lambda_{\text{QCD}})$. In particular, for $z = 1$ and $\Theta' = \Theta$ one has

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{\beta(\ell + y + \lambda)} = \frac{1}{\beta(Y + \lambda)}, \quad \ell + y = Y. \quad (3.15)$$

The DLA relation (3.8) can be refined to

$$Q(\ell, y) = \frac{C_F}{C_A} \left[1 + \left(a - \frac{3}{4}\right) \left(\psi_\ell + a(\psi_\ell^2 + \psi_{\ell\ell})\right) + \mathcal{O}(\gamma_0^2) \right] G(\ell, y), \quad (3.16)$$

where

$$\psi_\ell = \frac{1}{G(\ell, y)} \frac{dG(\ell, y)}{d\ell}, \quad \psi_\ell^2 + \psi_{\ell\ell} = \frac{1}{G(\ell, y)} \frac{d^2G(\ell, y)}{d\ell^2}.$$

³The present formula for a differs from (47) in [12] because, there, we defined $T_R = n_f/2$, instead of $T_R = 1/2$ here.

⁴The lower bound on Θ' follows from the kinematical condition $k_\perp \approx xE\Theta' \geq Q_0$

Indeed subtracting (3.13) and (3.12) gives

$$Q(\ell, y) - \frac{C_F}{N_c} G(\ell, y) = \frac{C_F}{N_c} \left(a - \frac{3}{4} \right) \int_0^y dy' \gamma_0^2 G(\ell, y'); \quad (3.17)$$

iterating twice (3.13) yields

$$\int_0^y dy' \gamma_0^2 G(\ell, y') = G_\ell + a G_{\ell\ell} + \mathcal{O}(\gamma_0^2) = G(\ell, y) (\psi_\ell + a(\psi_\ell^2 + \psi_{\ell\ell})) + \mathcal{O}(\gamma_0^2)$$

which is then plugged in (3.17) to get (3.16). $\psi_\ell^2 + \psi_{\ell\ell}$ can be easily estimated from subsection 4.2 to be $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$. In MLLA, (3.16) reduces to

$$Q(\ell, y) = \frac{C_F}{C_A} \left[1 + \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_\ell(\ell, y) + \mathcal{O}(\gamma_0^2) \right] G(\ell, y). \quad (3.18)$$

3.2 MLLA correlation

We estimate analogously the magnitude of various terms on the r.h.s. of (2.24) and (2.25). Terms proportional to $Q_2(1-z) - Q_2$ and to $Q_1(1-z) - Q_1$ in the second line of (2.24) will produce next-to-MLLA corrections that we drop out. In the first line, $Q^{(2)}(1-z) - Q^{(2)}$ ($Q^{(2)}(z)$ is also a smooth function of $\ln z$) will also produce higher order corrections that we neglect. We get

$$(Q^{(2)} - Q_1 Q_2)_y = \int_{x_1}^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} \Phi_g^q(z) G^{(2)}(z), \quad (3.19)$$

where we consider $z \geq x_1 \geq x_2$. In the first line of (2.25) we drop for identical reasons the term proportional to $G_2(1-z) - G_2$, and the term $G^{(2)}(z) - zG^{(2)}$ is regularized in the same way as we did for $G(z) - zG$ in (2.16). In the second non-singular line, we use the smooth behavior of $\phi_g^q(z)$ to neglect the z dependence in all $G^{(2)}$, $Q^{(2)}$, G and Q so that it factorizes and gives

$$\begin{aligned} (G^{(2)} - G_1 G_2)_y &= \int_{x_1}^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} (1-z) \Phi_g^q(z) G^{(2)}(z) \\ &+ \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} n_f \Phi_g^q(z) \left[2(Q^{(2)} - Q_1 Q_2) - (G^{(2)} - G_1 G_2) \right. \\ &\quad \left. + (2Q_1 - G_1)(2Q_2 - G_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

At the same level of approximation, we use the leading order relations

$$Q_i = \frac{C_F}{N_c} G_i, \quad Q^{(2)} - Q_1 Q_2 = \frac{C_F}{N_c} (G^{(2)} - G_1 G_2); \quad (3.21)$$

the last will be proved consistent in the following. This makes the equation for the correlation in the gluon jet self-contained, we then get

$$\begin{aligned} (G^{(2)} - G_1 G_2)_y &= \int_{x_1}^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} (1-z) \Phi_g^q(z) G^{(2)}(z) \\ &+ \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} n_f \Phi_g^q(z) \left(2 \frac{C_F}{N_c} - 1 \right) \left[(G^{(2)} - G_1 G_2) + \left(2 \frac{C_F}{N_c} - 1 \right) G_1 G_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Like for the spectra, we isolate the singular terms $2C_F/z$ and $2C_A/z(1-z)$ of the splitting functions ϕ_q^g and ϕ_g^g respectively (see (2.2) and (2.3)). We then write (3.19) and (3.22) as follows

$$(Q^{(2)} - Q_1 Q_2)_y = \int_{x_1}^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} 2C_F \left[\frac{1}{z} G^{(2)}(z) + \frac{1}{2}(z-2)G^{(2)} \right], \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} (G^{(2)} - G_1 G_2)_y &= \int_{x_1}^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} 2C_A \left[\frac{1}{z} G^{(2)}(z) + (1-z)(-2+z(1-z))G^{(2)} \right] \\ &\quad + \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{\pi} n_f T_R \left[z^2 + (1-z)^2 \right] \left(2\frac{C_F}{N_c} - 1 \right) \\ &\quad \times \left[(G^{(2)} - G_1 G_2) + \left(2\frac{C_F}{N_c} - 1 \right) G_1 G_2 \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

which already justifies *a posteriori* the last equation in (3.21). One then proceeds with the z integration of the polynomials that occur in the non-singular terms (that of (3.23) was already written in (3.6)). For the term $\propto G^{(2)}$ which we factorize by $2C_A$, we find (see (3.10) for the expression of a)

$$\int_0^1 dz \left[(1-z)(-2+z(1-z)) + \frac{n_f T_R}{2C_A} (z^2 + (1-z)^2) \left(2\frac{C_F}{N_c} - 1 \right) \right] = -a, \quad (3.25)$$

while in the one $\propto G_1 G_2$ we have simply

$$\frac{n_f T_R}{C_A} \left(1 - 2\frac{C_F}{N_c} \right) \left(1 - \frac{C_F}{N_c} \right) \int_0^1 dz [z^2 + (1-z)^2] = \frac{2n_f T_R}{3C_A} \left(1 - 2\frac{C_F}{N_c} \right) \left(1 - \frac{C_F}{N_c} \right). \quad (3.26)$$

Introducing

$$b = \frac{11}{12} - \frac{n_f T_R}{3N_c} \left(1 - \frac{2C_F}{N_c} \right)^2 = \frac{1}{4N_c} \left[\frac{11}{3}N_c - \frac{4}{3}n_f T_R \left(1 - 2\frac{C_F}{N_c} \right)^2 \right] \stackrel{n_f=3}{=} 0.915 \quad (3.27)$$

allows us to express (3.26) with $C_A = N_c$ as

$$a - b = \frac{2n_f T_R}{3N_c} \left(1 - \frac{2C_F}{N_c} \right) \left(1 - \frac{C_F}{N_c} \right) \stackrel{n_f=3}{=} 0.02, \quad (3.28)$$

such that (3.23) and (3.24) can be easily rewritten in the form

$$(Q^{(2)} - Q_1 Q_2)_y = \frac{C_F}{N_c} \int_{x_1}^1 \frac{dz}{z} \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G^{(2)}(z) - \frac{3}{4} \frac{C_F}{N_c} \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G^{(2)}, \quad (3.29)$$

$$(G^{(2)} - G_1 G_2)_y = \int_{x_1}^1 \frac{dz}{z} \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G^{(2)}(z) - a \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G^{(2)} + (a - b) \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} G_1 G_2. \quad (3.30)$$

Again, $\alpha_s = \alpha_s(\ln z)$ in the leading contribution, while in the sub-leading ones it is a constant. We now introduce the following convenient variables and notations to rewrite correlation evolution equations

$$\ell_i = \ln \frac{1}{x_i} = \ln \frac{E}{\omega_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.31)$$

$$y_i = \ln \frac{\omega_i \Theta}{Q_0} = \ln \frac{x_i E \Theta}{Q_0} = Y - \ell_i \quad \text{and} \quad \eta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ell_2 - \ell_1 = y_1 - y_2 > 0. \quad (3.32)$$

The transverse momentum of parton with energy zE is $k_\perp \approx zE\Theta_1$. We conveniently define the integration variables z and Θ_1 satisfying $x_1 \leq z \leq 1$ and $\Theta_2 \leq \Theta_1 \leq \Theta$ with $\Theta_2 \geq (\Theta_2)_{\min} = Q_0/\omega_2$ through

$$\ell = \ln \frac{z}{x_1}, \quad y = \ln \frac{x_2 E \Theta_1}{Q_0}, \quad (3.33)$$

then we write

$$\gamma_0^2(zE\Theta_1) = \frac{1}{\beta \left(\ln \frac{z}{x_1} + \ln \frac{x_2 E \Theta_1}{Q_0} + \ln \frac{x_1}{x_2} + \lambda \right)} \equiv \gamma_0^2(\ell + y) = \frac{1}{\beta(\ell + y + \eta + \lambda)}. \quad (3.34)$$

In particular, for $z = 1$ and $\Theta_1 = \Theta$ we have

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{\beta(\ell_1 + y_2 + \eta + \lambda)} = \frac{1}{\beta(Y + \lambda)}, \quad \ell_1 + y_2 + \eta = Y.$$

The condition $x_1 \leq z \leq 1$ translates into $0 \leq \ell \leq \ell_1$, while $(\Theta_2)_{\min} \leq \Theta_1 \leq \Theta$ becomes $0 \leq y \leq y_2$. Therefore,

$$\int_{x_1}^1 \frac{dz}{z} = \int_0^{\ell_1} d\ell \quad \text{and} \quad \int_{Q_0/\omega_2}^{\Theta} \frac{d\Theta_1}{\Theta_1} = \int_0^{y_2} dy.$$

One gets finally the MLLA system of equations of (3.29)–(3.30) for quark and gluon jets correlations

$$Q^{(2)}(\ell_1, y_2, \eta) - Q_1(\ell_1, y_1)Q_2(\ell_2, y_2) = \frac{C_F}{N_c} \int_0^{\ell_1} d\ell \int_0^{y_2} dy \gamma_0^2(\ell + y) \left[1 - \frac{3}{4}\delta(\ell - \ell_1) \right] \times G^{(2)}(\ell, y, \eta), \quad (3.35)$$

$$G^{(2)}(\ell_1, y_2, \eta) - G_1(\ell_1, y_1)G_2(\ell_2, y_2) = \int_0^{\ell_1} d\ell \int_0^{y_2} dy \gamma_0^2(\ell + y) \left[1 - a\delta(\ell - \ell_1) \right] G^{(2)}(\ell, y, \eta) + (a - b) \int_0^{y_2} dy \gamma_0^2(\ell_1 + y) G(\ell_1, y + \eta) G(\ell_1 + \eta, y). \quad (3.36)$$

In the last line of (3.36) we have made use of (3.32) to write

$$G_1 \equiv G(\ell_1, y_1) = G(\ell_1, y_2 + \eta), \quad G_2 \equiv G(\ell_2, y_2) = G(\ell_1 + \eta, y_2). \quad (3.37)$$

The first term in (3.35) and (3.36) represents the DLA contribution; the terms proportional to δ functions or to a, b , represent MLLA corrections. $a - b$ appearing in (3.36) and defined in (3.28) is proportional to n_f , positive and color suppressed.

4. Two-particle correlation in a gluon jet

4.1 Iterative solution

Since equation (3.36) for a gluon jet is self contained, it is our starting point. We define the normalized correlator \mathcal{C}_g by

$$G^{(2)} = \mathcal{C}_g(\ell_1, y_2, \eta) G_1 G_2, \quad (4.1)$$

where G_1 and G_2 are expressed in (3.37). Plugging (4.1) into (3.36) one gets (see appendix A) the following expression for the correlator

$$\mathcal{C}_g - 1 = \frac{1 - \delta_1 - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - [\beta\gamma_0^2]) - [a\chi_\ell + \delta_2]}{1 + \Delta + \delta_1 + [a(\chi_\ell + [\beta\gamma_0^2]) + \delta_2]} \quad (4.2)$$

which is to be evaluated numerically. We have introduced the following notations and variables

$$\chi = \ln \mathcal{C}_g, \quad \chi_\ell = \frac{d\chi}{d\ell}, \quad \chi_y = \frac{d\chi}{dy}; \quad (4.3)$$

$$\psi_1 = \ln G_1, \quad \psi_{1,\ell} = \frac{1}{G_1} \frac{dG_1}{d\ell}, \quad \psi_{1,y} = \frac{1}{G_1} \frac{dG_1}{dy}; \quad (4.4)$$

$$\psi_2 = \ln G_2, \quad \psi_{2,\ell} = \frac{1}{G_2} \frac{dG_2}{d\ell}, \quad \psi_{2,y} = \frac{1}{G_2} \frac{dG_2}{dy}; \quad (4.5)$$

$$\Delta = \gamma_0^{-2} (\psi_{1,\ell}\psi_{2,y} + \psi_{1,y}\psi_{2,\ell}); \quad (4.6)$$

$$\delta_1 = \gamma_0^{-2} [\chi_\ell(\psi_{1,y} + \psi_{2,y}) + \chi_y(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell})]; \quad (4.7)$$

$$\delta_2 = \gamma_0^{-2} (\chi_\ell\chi_y + \chi_{\ell y}). \quad (4.8)$$

As long as \mathcal{C}_g is changing slowly with ℓ and y , (4.2) can be solved iteratively. The expressions of ψ_ℓ and ψ_y , as well as the numerical analysis of the other quantities are explicitly given in appendices D.2 and E for $\lambda = 0$ ($Q_0 = \Lambda_{\text{QCD}}$), the so called “limiting spectrum”. Consequently, (4.2) will be computed in the same limit.

4.2 Magnitude estimate of various contributions

To estimate the relative role of various terms in (4.2) we can make use of a simplified model for the MLLA spectrum in which one neglects the variation of α_s , hence of γ_0 in (3.9). It becomes, after differentiating with respect to ℓ

$$G_{\ell y} = \gamma_0^2 (G - a G_\ell). \quad (4.9)$$

The solution of this equation is the function for $\gamma_0^2 = \text{const}$ (see appendix C for details)

$$G(\ell, y) \stackrel{x \ll 1}{\simeq} \exp \left(2\gamma_0 \sqrt{\ell y} - a\gamma_0^2 y \right). \quad (4.10)$$

The subtraction term $\propto a$ in (4.10) accounts for hard corrections (MLLA) that shifts the position of the asymptotic DLA peak $Y/2$ toward larger values of ℓ (smaller x) and partially guarantees the energy balance during soft gluons cascading (see [2, 4] and references therein). The position of the maximum follows from (4.10)

$$\ell_{\text{max}} = \frac{Y}{2} (1 + a\gamma_0).$$

From (4.10) one gets

$$\psi_\ell = \gamma_0 \sqrt{\frac{y}{\ell}}, \quad \psi_y = \gamma_0 \sqrt{\frac{\ell}{y}} - a\gamma_0^2, \quad \psi_{\ell y} \sim \psi_{\ell\ell} \sim \psi_{yy} = \mathcal{O}(\gamma_0^3), \quad \ell^{-1} \sim y^{-1} = \mathcal{O}(\gamma_0^2) \quad (4.11)$$

and the function Δ in (4.6) becomes

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\sqrt{\frac{y_1 \ell_2}{\ell_1 y_2}} + \sqrt{\frac{\ell_1 y_2}{y_1 \ell_2}} \right) - a\gamma_0 \left(\sqrt{\frac{y_1}{\ell_1}} + \sqrt{\frac{y_2}{\ell_2}} \right) \\ &= 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2) - a\gamma_0(e^{\mu_1} + e^{\mu_2}); \quad \mu_i = \frac{1}{2} \ln \frac{y_i}{\ell_i}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

We see that $\Delta = \mathcal{O}(1)$ and depends on the ratio of logarithmic variables ℓ and y . One step further is needed before we can estimate the order of magnitude of χ_ℓ , χ_y and $\chi_{\ell y}$. Indeed, the leading contribution to these quantities is obtained by taking the leading (DLA) piece of (4.2), that is

$$\chi \stackrel{DLA}{\simeq} \ln \left(1 + \frac{1}{1 + \Delta} \right);$$

then, it is easy to get

$$\chi_\ell = -\frac{\Delta_\ell}{(1 + \Delta)(2 + \Delta)}, \quad \chi_y = -\frac{\Delta_y}{(1 + \Delta)(2 + \Delta)};$$

we have roughly

$$\chi_\ell \propto \mu_\ell, \quad \chi_y \propto \mu_y, \quad \chi_{\ell y} \propto \mu_\ell \mu_y;$$

since $\mu_{i,\ell} = \mu_{i,y} = \mathcal{O}(\gamma_0^2)$ one gets

$$\chi_\ell \sim \chi_y = \mathcal{O}(\gamma_0^2), \quad \chi_{\ell y} \sim \chi_\ell \chi_y = \mathcal{O}(\gamma_0^4), \quad (4.13)$$

which entails for the corrections terms δ_1 and δ_2 in (4.7) (4.8)

$$\delta_1 = \mathcal{O}(\gamma_0), \quad \delta_2 = \mathcal{O}(\gamma_0^2). \quad (4.14)$$

The term δ_1 constitutes a MLLA correction while δ_2 as well as other terms that are displayed in square brackets in (4.2) are of order γ_0^2 and are, formally speaking, beyond the MLLA accuracy.

4.3 MLLA reduction of (4.2)

Dropping $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$ terms, the expression for the correlator would simplify to

$$\mathcal{C}_g - 1 \stackrel{MLLA}{\approx} \frac{1 - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) - \delta_1}{1 + \Delta + \delta_1}. \quad (4.15)$$

4.4 $\mathcal{C}_g \geq 0$ in the soft approximation

\mathcal{C}_g must obviously be positive. By looking at $\mathcal{C}_g \geq 0$ one determines the region of applicability of our soft approximation. Using (4.15), the condition reads

$$2 + \Delta > b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}). \quad (4.16)$$

For the sake of simplicity, we employ the model (4.10) (4.11) (4.12), this gives

$$2(1 + \cosh(\mu_1 - \mu_2)) > \gamma_0(a + b)(e^{\mu_1} + e^{\mu_2}), \quad (4.17)$$

which translates into

$$\sqrt{\frac{\ell_1}{y_1}} + \sqrt{\frac{\ell_2}{y_2}} > \gamma_0 (a + b). \quad (4.18)$$

For $\ell_1, \ell_2 \ll Y$ we can set $y_1 \simeq y_2 \simeq Y$ and, using $\gamma_0^2 \simeq 1/\beta Y$,⁵ we get the condition

$$\sqrt{\ell_1} + \sqrt{\ell_2} > \frac{a+b}{\sqrt{\beta}} \simeq 2.1, \quad (4.19)$$

which is satisfied as soon as $\ell_1 > 1$ ($\ell_2 > \ell_1$); so, for $x_1 \lesssim 0.4, x_2 < x_1$, the correlation \mathcal{C} is positive.

4.5 The sign of $(\mathcal{C}_g - 1)$

In the region of relatively hard particles $(\mathcal{C}_g - 1)$ becomes negative. To find out at which value of ℓ it happens, we use the simplified model and take, for the sake of simplicity, $\ell_1 = \ell_2 = \ell_{\pm}$.

The condition $1 = \delta_1 + b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell})$, using (2.19) (3.15) (4.11) and neglecting δ_1 which vanishes at $\ell_1 \approx \ell_2$ reads

$$1 - b\gamma_0 \cdot 2\sqrt{\frac{Y - \ell_{\pm}}{\ell_{\pm}}} = 0 \Leftrightarrow \ell_{\pm} = \frac{M_g}{1 + \frac{M_g}{Y}}, \quad M_g = \frac{4b^2}{\beta} \simeq 4.5. \quad (4.20)$$

Thus, in the $Y \rightarrow \infty$ limit, the correlation between two equal energy partons in a gluon jet turns negative at a fixed value, $x > x_{\pm} \simeq \exp(4.5) = 1/90$. For finite energies, this energy is essentially larger; in particular, for $Y = 5.2$ (which corresponds to LEP-I energy) (4.20) gives $\ell_{\pm} \simeq 2.4$ ($x_{\pm} \simeq 1/11$).

For the Tevatron, let us for instance take the typical value $Y = 6.0$, one has $\ell_{\pm} \simeq 2.6$ and finally, for the LHC we take the typical one, $Y = 7.5$, one gets the corresponding $\ell_{\pm} \simeq 2.8$. This is confirmed numerically in figures 2, 7 and 9.

5. Two-particle correlations in a quark jet

5.1 Iterative solution

We define the normalized correlator \mathcal{C}_q by

$$Q^{(2)} = \mathcal{C}_q(\ell_1, y_2, \eta) Q_1 Q_2, \quad (5.1)$$

where Q_1 and Q_2 are expressed like in (3.37) for G_1 and G_2 . By differentiating (3.35) with respect to ℓ_1 and y_2 , one gets (see appendix B)

$$\mathcal{C}_q - 1 = \frac{\frac{N_c}{C_F} \mathcal{C}_g \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} + [\chi\ell] - [\beta\gamma_0^2]) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_1}{Q_1} \frac{C_F}{N_c} \frac{G_2}{Q_2} - \tilde{\delta}_1 - [\tilde{\delta}_2]}{\tilde{\Delta} + \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{1,\ell} - [\beta\gamma_0^2]) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_1}{Q_1} + \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{2,\ell} - [\beta\gamma_0^2]) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_2}{Q_2} + \tilde{\delta}_1 + [\tilde{\delta}_2]}, \quad (5.2)$$

⁵For $n_f = 3, \beta = 0.75$.

which is used for numerical analysis. G_i/Q_i is computed using (3.16). The terms $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$ are the ones that can be neglected when staying at MLLA (see 5.2). We have introduced, in addition to (4.3)-(4.8), the following notations

$$\tilde{\Delta} = \gamma_0^{-2} (\varphi_{1,\ell} \varphi_{2,y} + \varphi_{1,y} \varphi_{2,\ell}), \quad (5.3)$$

$$\tilde{\delta}_1 = \gamma_0^{-2} [\sigma_\ell (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,y}) + \sigma_y (\varphi_{1,\ell} + \varphi_{2,\ell})], \quad (5.4)$$

$$\tilde{\delta}_2 = \gamma_0^{-2} (\sigma_\ell \sigma_y + \sigma_{\ell y}), \quad (5.5)$$

with

$$\varphi_k = \ln Q_k, \quad \sigma = \ln C_q. \quad (5.6)$$

Accordingly, (5.2) will be computed for $\lambda = 0$, the analysis of the previous functions is done in appendix E.

5.2 MLLA reduction of (5.2)

Using (3.18), which entails $\frac{C_F}{N_c} \frac{G_i}{Q_i} \simeq 1 - (a - \frac{3}{4}) \psi_{i,\ell} + \mathcal{O}(\gamma_0^2)$, reduces (B.4) to

$$\begin{aligned} C_q - 1 &= \frac{\frac{N_c}{C_F} C_g \left[1 - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) - \frac{3}{4} [\chi_\ell - \beta \gamma_0^2] \right] - C_q (\tilde{\delta}_1 + [\tilde{\delta}_2])}{2 + \tilde{\Delta} - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) + [\frac{3}{2} \beta \gamma_0^2]} \\ &= \frac{\frac{N_c}{C_F} C_g \left[1 - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) - \frac{3}{4} [\chi_\ell - \beta \gamma_0^2] \right] - \tilde{\delta}_1 - [\tilde{\delta}_2]}{2 + \tilde{\Delta} - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) + [\frac{3}{2} \beta \gamma_0^2] + \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

As demonstrated in appendix B.2, $\tilde{\Delta} = \Delta + \mathcal{O}(\gamma_0^2)$ and

$$C_q (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2) \simeq \frac{N_c}{C_F} C_g (\delta_1 + \delta_2); \quad (5.8)$$

and (5.7) becomes

$$C_q - 1 \approx \frac{N_c}{C_F} \frac{C_g \left[1 - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) - \frac{3}{4} [\chi_\ell - \beta \gamma_0^2] - \delta_1 - [\delta_2] \right]}{2 + \Delta - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) + [\frac{3}{2} \beta \gamma_0^2]}. \quad (5.9)$$

Would we neglect, according to (4.13) (4.14), next to MLLA terms, which amounts to dropping all $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$ corrections, (5.7) would simply reduce to

$$C_q - 1 \stackrel{MLLA}{\approx} \frac{N_c}{C_F} \frac{C_g \left[1 - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) \right] - \delta_1}{2 + \Delta - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) + \delta_1}. \quad (5.10)$$

Furthermore, comparing (5.9) and (4.15) and using the magnitude estimates of subsection 4.2 allows to make an expansion in the small $\mathcal{O}(\gamma_0)$ corrections δ_1 , $\psi_{1,\ell}$ and $\psi_{2,\ell}$ to get

$$\frac{C_q - 1}{C_q - 1} \stackrel{MLLA}{\simeq} \frac{N_c}{C_F} \left[1 + (b - a)(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) \frac{1 + \Delta}{2 + \Delta} \right]$$

$$\approx \frac{N_c}{C_F} \left[1 + (b-a)(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) \left(C_g^{\text{DLA}} \right)^{-1} \right], \quad (5.11)$$

where we have consistently used the DLA expression $C_g^{\text{DLA}} = \frac{2+\Delta}{1+\Delta}$. $(a-b)$ is given in (3.28). The deviation of the ratio from the DLA value N_c/C_F is proportional to n_f , is color-suppressed and numerically small.

5.3 $C_q \geq 0$ in the soft approximation

Since we neglect NMLLA corrections and the running of α_s , we can make use of (5.11) in order to derive the positivity constraint for the quark correlator. In the r.h.s. of (5.11) we can indeed neglect the MLLA correction in the square brackets because it is numerically small (for instance, for $\gamma_0 \simeq 0.5$ it is $\approx 10^{-3}$). Therefore, C_q changes sign when

$$C_g \geq 1 - \frac{C_F}{N_c} = \frac{5}{9} \approx \frac{1}{2},$$

(4.18) gets therefore replaced by

$$\sqrt{\frac{\ell_1}{y_1}} + \sqrt{\frac{\ell_2}{y_2}} > \frac{4}{5}(a+2b)\gamma_0,$$

which finally, following the same steps, gives

$$\sqrt{\ell_1} + \sqrt{\ell_2} > \frac{4}{5} \frac{a+2b}{\sqrt{\beta}} \simeq 2.6.$$

The last inequality is satisfied as soon as $\ell_1 > 1.6$ ($\ell_2 > \ell_1$). This condition slightly differs from that of the gluon correlator in 4.5.

5.4 The sign of $(C_q - 1)$

From (5.10), $C_q - 1$ changes sign for

$$C_q - 1 \approx \frac{N_c}{C_F} \frac{C_g \left[1 - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) \right]}{2 + \Delta - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell})} > 0 \quad (5.12)$$

which gives the condition

$$1 = a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}).$$

This gives a formula identical to (4.20) with the exchange $b \rightarrow a$; a being slightly larger than b , we find now a parameter $M_q = 4a^2/\beta \simeq 4.66$. The corresponding ℓ_{\pm} at which $(C_q - 1)$ will change sign is slightly higher than for gluons; for example at $Y = 5.2$, $\ell_{\pm} \simeq 2.5$ ($x_{\pm} \simeq 1/12$), $Y = 6.0$, $\ell_{\pm} \simeq 2.7$ ($x_{\pm} \simeq 1/13$), $Y = 7.5$, $\ell_{\pm} \simeq 2.9$ ($x_{\pm} \simeq 1/16$). This is confirmed numerically in figures 3, 8 and 10.

6. Numerical results

In order to lighten the core of the paper, only the main lines and ideas of the calculations and the results, are given here; the numerical analysis of (MLLA and NMLLA) corrections occurring in (4.2) and (5.2) is the object of appendix E, that we summarize in subsection 6.3 below. We present our results as functions of $(\ell_1 + \ell_2)$ and $(\ell_1 - \ell_2)$.

6.1 The gluon jet correlator

In order to implement the iterative solution of the first line of (4.2), we define

$$\Upsilon_g = \ln \left[1 + \frac{1 - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - [\beta\gamma_0^2])}{1 + \Delta + [a\beta\gamma_0^2]} \right] \quad (6.1)$$

as the starting point of the procedure. It represents the zeroth order of the iteration for $\chi \equiv \ln \mathcal{C}_g$. The terms proportional to derivatives of χ in the numerator and denominator of (4.2) are the objects of the iteration and do not appear in (6.1); the parameter Δ depends (see (4.6)) only on the logarithmic derivatives ψ_ℓ, ψ_y of the inclusive spectrum G which are determined at each step, by the exact solution (D.9) (D.10) for G demonstrated in appendix D. The leading piece (DLA) of (6.1)

$$\Upsilon_g \stackrel{DLA}{=} \ln \left[1 + \frac{1}{1 + \Delta} \right]$$

is the one that should be used when reducing (4.2) to MLLA. We have instead consistently kept sub-leading (MLLA and NMLLA) corrections in (6.1) in order to follow the same logic that proved successful for the single inclusive spectrum.

6.2 The quark jet correlator

We start now from (5.2) and define, as for gluons

$$\Upsilon_q = \ln \left\{ 1 + \frac{\frac{N_c}{C_F} \mathcal{C}_g \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} + [\chi_\ell - \beta\gamma_0^2]) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_1}{Q_1} \frac{C_F}{N_c} \frac{G_2}{Q_2}}{\tilde{\Delta} + \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{1,\ell} - [\beta\gamma_0^2]) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_1}{Q_1} + \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{2,\ell} - [\beta\gamma_0^2]) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_2}{Q_2}} \right\} \quad (6.2)$$

as the starting point of the iterative procedure, i.e. the zeroth order of the iteration for $\sigma \equiv \ln \mathcal{C}_q$; it again includes MLLA (and some NMLLA) corrections. Since the iteration concerns \mathcal{C}_q , the terms proportional to \mathcal{C}_g and to its derivative χ_ℓ must be present in (6.2). All other functions are determined, as above, by the exact solution of (D.9) and (D.10) for G .

We have replaced in the denominator of (6.2) $\tilde{\Delta}$ with Δ , which amounts to neglecting $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$ corrections, because the coefficient of $\gamma_0^{-2}(\tilde{\Delta} - \Delta)$ is numerically very small; this occurs for two combined reasons: it is proportional to $(a - 3/4)$ which is small, and the combination $(\psi_{1,\ell y} \psi_{2,\ell} + \psi_{2,\ell \ell} \psi_{1,y} + \psi_{2,\ell y} \psi_{1,\ell} + \psi_{1,\ell \ell} \psi_{2,y})$ that appears in (B.10) is very small (see figure 13). Accordingly,

$$\Upsilon_q \stackrel{DLA}{=} \ln \left[1 + \frac{N_c}{C_F} \frac{1}{1 + \Delta} \right].$$

We can use this simplified expression for the MLLA reduction of (5.2).

6.3 The role of corrections; summary of appendix E

Analysis have been done separately for a gluon and a quark jet; their conclusions are very similar.

That ψ_ℓ and ψ_y , which are $\mathcal{O}(\gamma_0)$ should not exceed reasonable values (fixed arbitrarily to 1) provides an interval of reliability of our calculations; for example, at LEP-I

$$2.5 \leq \ell \leq 4.5 \text{ or } 5 \leq \ell_1 + \ell_2 \leq 9, \quad Y = 5.2. \quad (6.3)$$

This interval is shifted upwards and gets larger when Y increases.

Υ_g and Υ_q defined in (6.1) and (6.2) and their derivatives are shown to behave smoothly in the confidence interval (6.3).

The roles of all corrections $\delta_1, \delta_2, \Delta$ for a gluon jet, $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\Delta}$ for a quark jet, have been investigated individually. They stay under control in (6.3). While, in its center, their relative values coincide with what is expected from subsection 4.2, NMLLA corrections can become larger than MLLA close to the bounds; this could make our approximations questionable. Two cases may occur which depend on NMLLA corrections not included in the present frame of calculation; either they largely cancel with the included ones and the sum of all NMLLA corrections is (much) smaller than those of MLLA: then pQCD is trustable at $Y = 5.2$; or they do not, the confidence in our results at this energy is weak, despite the fast convergence of the iterative procedure which occurs thanks to the “accidental” observed cancellation between MLLA and those of NMLLA which are included. The steepest descent method [10, 11], in which a better control is obtained of MLLA corrections alone, will shed some more light on this question. The global role of all corrections in the iterative process does not exceed 30% for $Y = 5.2$ (OPAL) at the bounds of (6.3); it is generally much smaller, though never negligible. In particular, $\delta_1 + \delta_2 + a\Upsilon_{g,\ell}$ for gluons (or $\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2$ for quarks) sum up to $\mathcal{O}(10^{-2})$ at LEP energy scale (they reach their maximum $\mathcal{O}(10^{-1})$ at the bound of the interval corresponding to the 30% evoked above).

The role of corrections decreases when the total energy Y of the jet increases, which makes our calculations all the more reliable.

6.4 Results for LEP-I

In $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ collisions at the Z^0 peak, $Q = 91.2 \text{ GeV}$, $Y = 5.2$, and $\gamma_0 \simeq 0.5$. In figure 2 we give the results for gluon jets and in figure 3 for quark jets.

6.4.1 Comments

Near the maximum of the single inclusive distribution ($\ell_1 \approx \ell_2 \approx \frac{Y}{2}(1 + a\gamma_0)$) our curves are linear functions of $(\ell_1 + \ell_2)$ and quadratic functions of $(\ell_1 - \ell_2)$, in agreement with the Fong-Webber analysis [6].

$(C_q - 1)$ is roughly twice $(C_g - 1)$ since gluons cascade twice as much as quarks ($\frac{N_c}{C_F} \approx 2$). The difference is clearly observed from figure 2 and figure 3 (left) near the hump of the single inclusive distribution ($\ell_1 + \ell_2 \simeq 7.6$), that is where most of the partonic multiplication takes place.

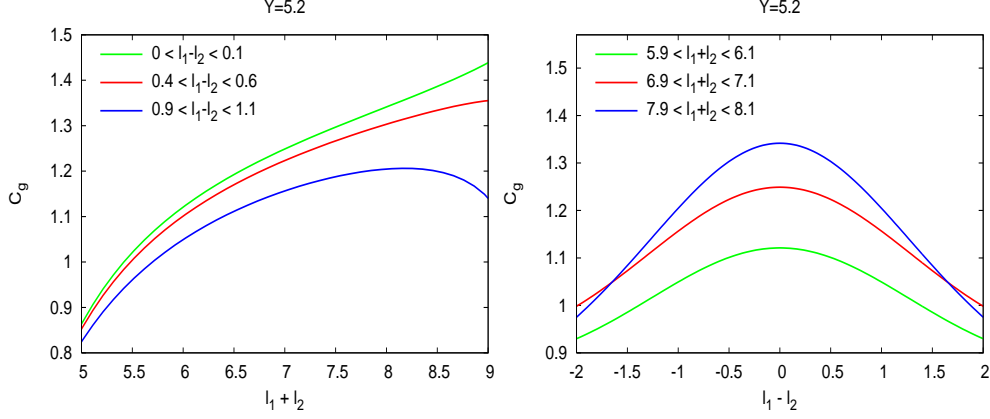


Figure 2: C_g for the LEP-I ($Y = 7.5$) inside a gluon jet as function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and of $\ell_1 - \ell_2$ (right)

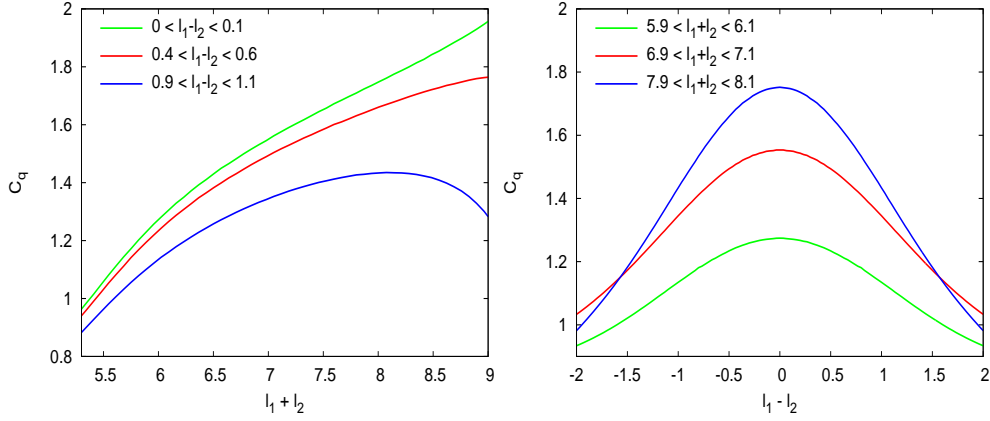


Figure 3: C_q for the LEP-I ($Y = 7.5$) inside a quark jet as function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and of $\ell_1 - \ell_2$ (right)

In both cases, \mathcal{C} reaches its largest value for $\ell_1 \approx \ell_2$ and steadily increases as a function of $(\ell_1 + \ell_2)$ (figure 2, left); for $\ell_1 \neq \ell_2$, it increases with $(\ell_1 + \ell_2)$, then flattens off and decreases.

Both \mathcal{C} 's decrease as $|\ell_1 - \ell_2|$ becomes large (figure 2 and 3, right). The quark's tail is steeper than the gluon's; for $5.9 < \ell_1 + \ell_2 < 6.1$, $(\mathcal{C} - 1)$ becomes negative when $\ell_1 - \ell_2$ increases; $\mathcal{C} \geq 1$ as soon as $\ell_1, \ell_2 \geq 2.75$ ($x_1, x_2 \leq 0.06$); this bound is close to $\ell \geq 2.4$ found in subsection 4.5 or $\ell \geq 2.5$ of (E.1).

One finds the limit

$$\mathcal{C}_{g \text{ or } q} \xrightarrow{\ell_1 + \ell_2 \rightarrow 2Y} 1. \quad (6.4)$$

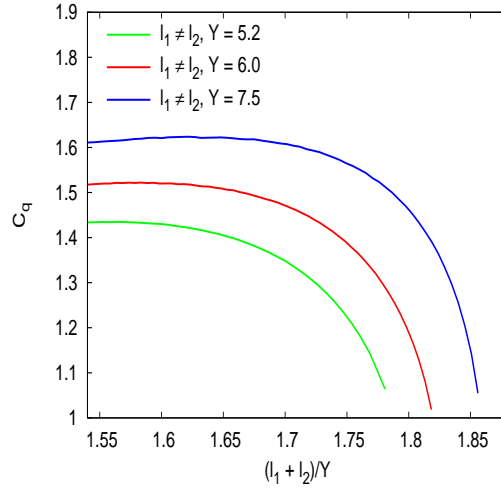


Figure 4: Decrease of the correlation for $\ell_1 \neq \ell_2$ at $Y = 5.2$, $Y = 6.0$ and $Y = 7.5$

Actually, one observes on figures 2, 3 and 4 that a stronger statement holds. Namely, when we take the limit $\ell_2 \rightarrow Y$ for the softer particle, the correlator goes to 1. This is the consequence of QCD coherence. The softer gluon is emitted at larger angles by the total color charge of the jet and thus becomes de-correlated with the internal partonic structure of the jet.

The same phenomenon explains the flattening and the decrease of \mathcal{C} 's at $\ell_1 \neq \ell_2$.

An interesting phenomenon is the seemingly continuous increase of \mathcal{C}_g and \mathcal{C}_q at large Y for $\ell_1 \approx \ell_2$ (green curves in figures 2 and 3 left). As we discussed in [12] concerning inclusive distributions, here we reach a domain where a perturbative analysis cannot be trusted *because of the divergence of α_s* . Indeed, when $(\ell_1 + \ell_2)$ gets close to its limiting kinematical value ($2Y$), both y_1 and y_2 get close to 0, so that the corresponding $\alpha_s(k_{1\perp}^2)$ and $\alpha_s(k_{2\perp}^2)$ cannot but become out of control. Away from the $\ell_1 \approx \ell_2$ diagonal, taking $\ell_2 \rightarrow Y$ ($y_2 \rightarrow 0$), we have $y_1 \rightarrow \eta > 0$ and the emission of the harder parton still remains under control.

The two limitations of our approach already pointed at in [12] are found again here:

- * x should be small enough so that our soft approximation remains valid;
- * no running coupling constant should get too large so that pQCD remains reliable.

6.5 Comparison with the data from LEP-I

OPAL results are given in terms of

$$R(\ell_1, \ell_2, Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{C}_q(\ell_1, \ell_2, Y).$$

In figure 5 we compare our prediction with the OPAL data [7] and the Fong-Webber curves (see subsection 6.6 and [6]).

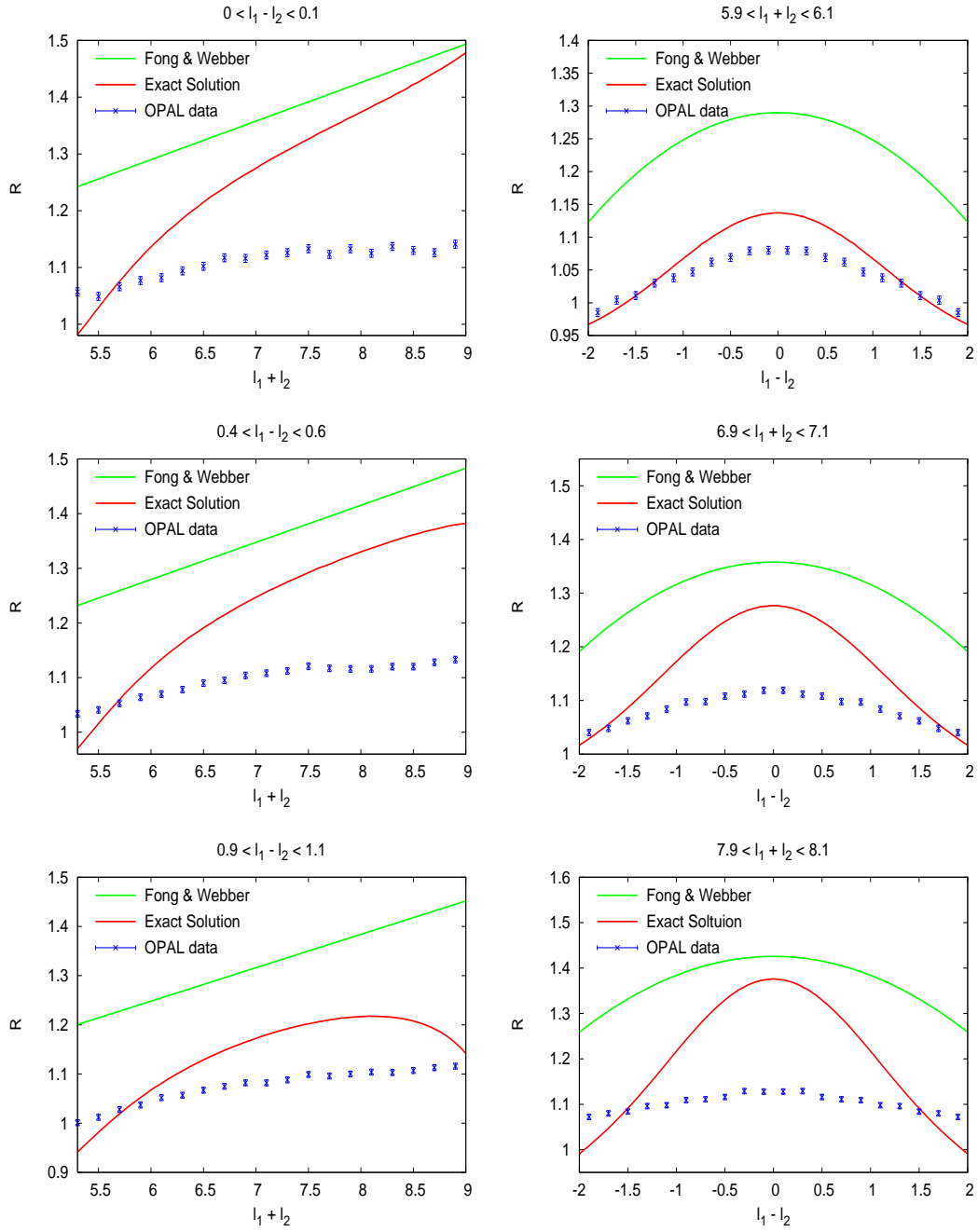


Figure 5: Correlations R between two particles produced in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ compared with the OPAL data and the Fong-Webber approximation

6.6 Comparing with the Fong-Webber approximation

The only pQCD analysis of two-particle correlations in jets beyond DLA was performed by Fong and Webber in 1990. In [6] the next-to-leading $\mathcal{O}(\gamma_0)$ correction, $\mathcal{C}_{g \text{ or } q} = 1 + \sqrt{\alpha_s} + \dots$, to the normalized two-particle correlator was calculated. This expression was derived in the region $|\ell_1 - \ell_2|/Y \ll 1$, that is when the energies of the registered particles are close to each other (and to the maximum of the inclusive distribution [2, 4, 13]). In this approximation the correlation function is quadratic in $(\ell_1 - \ell_2)$ and increases linearly with $(\ell_1 + \ell_2)$, see (6.6). For example, if one inserts the expression of the single inclusive distribution distorted Gaussian [13] (obtained in the region $\ell \approx \frac{Y}{2}(1 + a\gamma_0)$) into (4.15) the MLLA result for a gluon jet reads

$$\mathcal{C}_g(\ell_1, \ell_2, Y) \approx 1 + \frac{1 - \left(5b - 3b\frac{\ell_1 + \ell_2}{Y}\right)\gamma_0 + \mathcal{O}(\gamma_0^2)}{3 + 9\left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y}\right)^2 - \left(2\beta + 5a - 3a\frac{\ell_1 + \ell_2}{Y}\right)\gamma_0 + \mathcal{O}(\gamma_0^2)}, \quad (6.5)$$

where we have neglected the MLLA correction $\delta_1 \simeq (\ell_1 - \ell_2)^2 \sqrt{\alpha_s} \simeq 0$ near the hump of the single inclusive distribution ($\ell_1 \approx \ell_2 \approx \frac{Y}{2}(1 + a\gamma_0)$). The Fong-Webber answer is obtained by expanding (6.5) in γ_0 to get [6]

$$\mathcal{C}_g^{(\text{FW})} \approx \frac{4}{3} - \left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{Y}\right)^2 + \left[-\frac{5}{3} \left(b - \frac{1}{3}a\right) + \frac{2}{9}\beta + \left(b - \frac{1}{3}a\right) \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{Y}\right) \right] \gamma_0 + \mathcal{O}(\gamma_0^2). \quad (6.6)$$

In figure 6 we compare, choosing for pedagogical reasons $Y = 5.2$ and $Y = 100$, our exact solution of the evolution equation with the Fong-Webber predictions [6] for two-particle correlations. The mismatch in both cases is, as seen on (6.6), $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$, and decreases for smaller values of the perturbative expansion parameter γ_0 . In particular, at $Y = 100$, ($\gamma_0^2 \simeq 0.01$) the exact solution (4.2) gets close to (6.6). This comparison is analogous in the case of a quark jet.

We do not perform such an expansion in the present work but instead keep the ratios (4.2) and (5.2) as exact solutions of the evolution equations.

6.7 Predictions for Tevatron and LHC

In hadronic high energy colliders, the nature of the jet (quark or gluon) is not determined, and one simply detects outgoing hadrons, which can originate from either type; one then introduces a “mixing” parameter ω , which is to be determined experimentally, such that, the expression for two particle correlations can be written as a linear combination of \mathcal{C}_g and \mathcal{C}_q

$$\mathcal{C}^{\text{mixed}}(\omega; \ell_1, \ell_2, Y) = A(\omega; \ell_1, \ell_2, Y) \mathcal{C}_q(\ell_1, \ell_2, Y) + B(\omega; \ell_1, \ell_2, Y) \mathcal{C}_g(\ell_1, \ell_2, Y), \quad (6.7)$$

where

$$A(\omega; \ell_1, \ell_2, Y) = \frac{\omega \left[\frac{Q(\ell_1, Y)}{G(\ell_1, Y)} \frac{Q(\ell_2, Y)}{G(\ell_2, Y)} \right]}{\left[1 + \omega \left(\frac{Q(\ell_1, Y)}{G(\ell_1, Y)} - 1 \right) \right] \left[1 + \omega \left(\frac{Q(\ell_2, Y)}{G(\ell_2, Y)} - 1 \right) \right]}$$

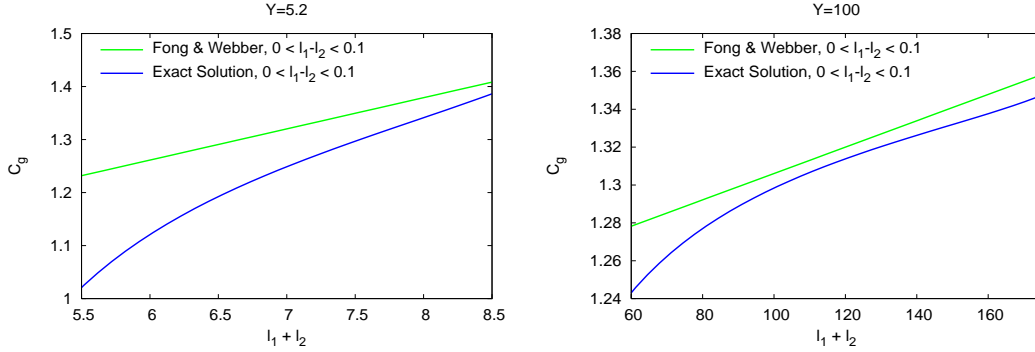


Figure 6: Exact C_g compared with Fong-Webber's at $Y = 5.2$ (left) and $Y = 100$ (right)

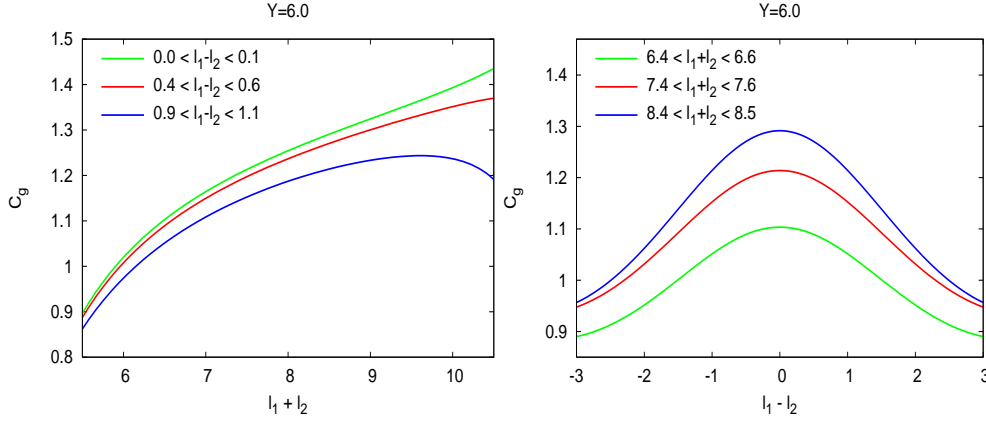


Figure 7: C_g for the Tevatron ($Y = 6.0$) as function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and of $\ell_1 - \ell_2$ (right)

and

$$B(\omega; \ell_1, \ell_2, Y) = \frac{(1 - \omega)}{\left[1 + \omega \left(\frac{Q(\ell_1, Y)}{G(\ell_1, Y)} - 1 \right)\right] \left[1 + \omega \left(\frac{Q(\ell_2, Y)}{G(\ell_2, Y)} - 1 \right)\right]}.$$

We plug in respectively (4.2) (5.2) for C_g and C_q ; the predictions for the latter are given in figures 7 and 8 for the Tevatron, figures 9 and 10 for the LHC.

6.7.1 Comments

For both $Y = 6.0$ (Tevatron) and $Y = 7.5$ (LHC), the global behavior given in 6.4.1 also holds. The interval corresponding to the condition $C_{g \text{ or } q} > 1$ is shifted toward larger values of ℓ (smaller x) as compared with the $Y = 5.2$ case, in agreement with the predictions of (4.5) and (5.4). Numerically, this is achieved for $\ell > 2.9$ ($\ell > 3.2$) at $Y = 6.0$ ($Y = 7.5$) in a gluon jet at the Tevatron (LHC). For a quark jet, these values become respectively

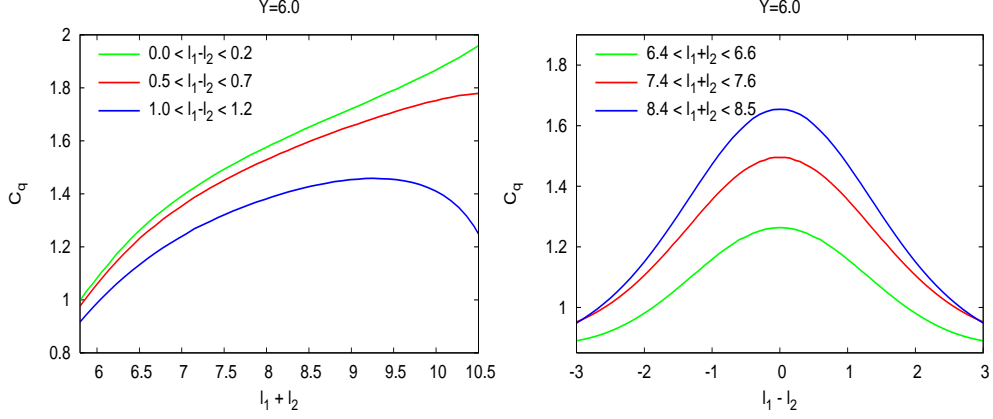


Figure 8: C_q for the Tevatron ($Y = 6.0$) as function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and of $\ell_1 - \ell_2$ (right)

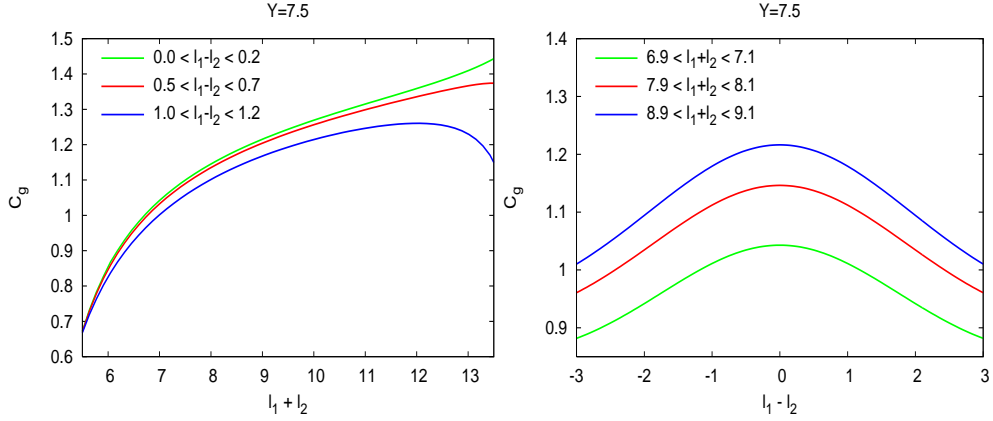


Figure 9: C_g for the LHC ($Y = 7.5$) inside a gluon jet as function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and of $\ell_1 - \ell_2$ (right)

$\ell > 3.1$ ($\ell > 3.3$) and one can check that they are close to the approximated ones obtained in (4.5) and (5.4).

One notices that correlations increase as the total energy (Y) increases (LHC > TeV > LEP-I).

6.8 Asymptotic behavior of $C_{g \text{ or } q}$

We display in figure 11 the asymptotic behavior of C_g and C_q when Y increases.

$$C_g \xrightarrow{Y \rightarrow \infty} \frac{\langle n(n-1) \rangle_g}{\langle n \rangle_g^2} \approx 1 + \frac{1}{3} \approx 1.33, \quad C_q \xrightarrow{Y \rightarrow \infty} \frac{\langle n(n-1) \rangle_q}{\langle n \rangle_q^2} \approx 1 + \frac{1}{3} \frac{N_c}{C_F} = 1.75,$$

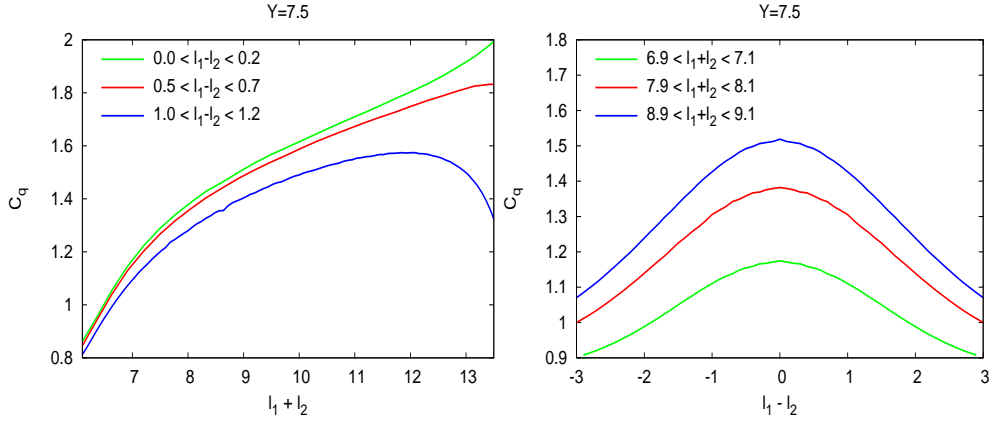


Figure 10: C_q for the LHC ($Y = 7.5$) inside a gluon jet as function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and of $\ell_1 - \ell_2$ (right)

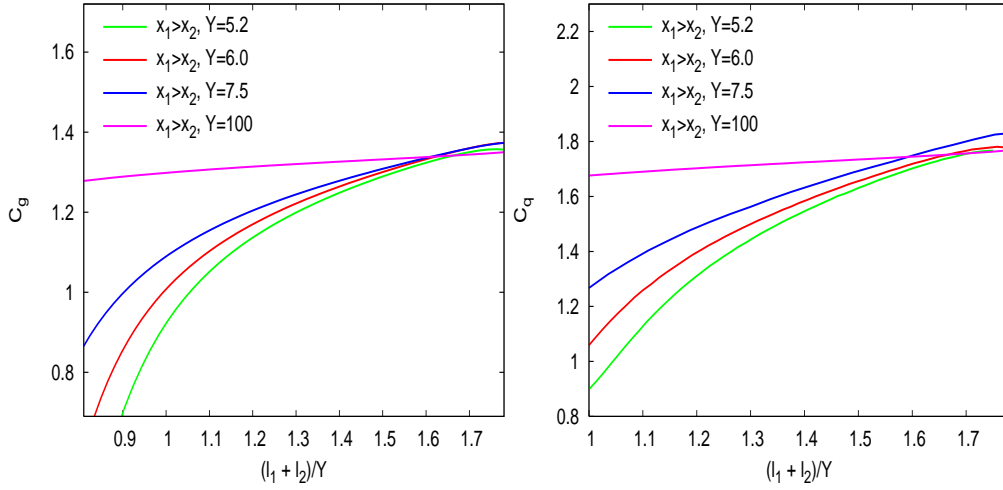


Figure 11: Asymptotic behavior of C_g and C_q when Y increases

where n is the multiplicity inside one jet. These limits coincide with those of the DLA multiplicity correlator [14, 15]. It confirms the consistency of our approach.

7. Conclusion

In this paper two-particle correlations between soft partons in quark and gluon jets were considered.

Corresponding evolution equations for parton correlators were derived in the next to

leading approximation of perturbative QCD, known as MLLA, which accounts for QCD coherence (angular ordering) on soft gluon multiplication, hard corrections to parton splittings and the running coupling effects.

The MLLA equations for correlators were analyzed and solved iteratively. This allowed us to generalize the result previously obtained by Fong and Webber in [6] that was valid in the vicinity of the maximum of the single inclusive parton energy distribution (“hump”).

In particular, we have analyzed the regions of moderately small x above which the correlation becomes “negative” ($\mathcal{C} - 1 < 0$). This happens when suppression takes over the positive correlation due to gluon cascading because of the limitation of the phase space.

Also, the correlation vanishes ($\mathcal{C} \rightarrow 1$) when one of the partons becomes very soft ($\ell = \ln 1/x \rightarrow Y = \ln E\Theta/Q_0$). The reason for that is dynamical rather than kinematical: radiation of a soft gluon occurs at *large angles* which makes the radiation coherent and thus insensitive to the internal parton structure of the jet ensemble.

Qualitatively, our MLLA result agrees better with available OPAL data than the Fong-Webber prediction. There remains however a significant discrepancy, markedly at very small x . In this region non-perturbative effects are likely to be more pronounced. They may undermine the applicability *to particle correlations* of the local parton-hadron duality considerations that were successful in translating parton level predictions to hadronic observations in the case of more inclusive *single particle energy spectra*.

Forthcoming data from Tevatron as well as future studies at LHC should help to elucidate the problem.

Acknowledgments

It is a great pleasure to thank Yuri Dokshitzer and Bruno Machet for their guidance and encouragements. I thank François Arléo, Bruno Durin for many discussions and Gavin Salam for his expert help in numerical calculations.

A. Derivation of the gluon correlator \mathcal{C}_g in (4.2)

One differentiates $G^{(2)} - G_1 G_2 \equiv G_1 G_2 (\mathcal{C}_g - 1)$ with respect to ℓ_1 and y_2 and uses the evolution equations (3.13) and (3.36).

By explicit differentiation and using the definitions (refeq:nota4bis)-(4.8) one gets

$$\begin{aligned} \left[G_1 G_2 (\mathcal{C}_g - 1) \right]_{\ell_y} &= G_1 G_2 \left[\mathcal{C}_{g,\ell y} + \mathcal{C}_{g,\ell} (\psi_{1,y} + \psi_{2,y}) + \mathcal{C}_{g,y} (\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) \right] \\ &\quad + (\mathcal{C}_g - 1) \left[G_1 G_2 (\psi_{1,\ell} \psi_{2,y} + \psi_{2,\ell} \psi_{1,y}) + G_1 G_{2,\ell y} + G_2 G_{1,\ell y} \right]; \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

the definition (4.3) of χ entails $\mathcal{C}_{g,\ell} = \chi_\ell \mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_{g,y} = \chi_y \mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_{g,\ell y} = \mathcal{C}_g (\chi_\ell y + \chi_\ell \chi_y)$, such that (A.1) rewrites

$$\begin{aligned} \left[G^{(2)} - G_1 G_2 \right]_{\ell_y} &= \mathcal{C}_g G_1 G_2 \left[(\chi_\ell y + \chi_\ell \chi_y) + \chi_\ell (\psi_{1,y} + \psi_{2,y}) + \chi_y (\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) \right] \\ &\quad + (\mathcal{C}_g - 1) \left[G_1 G_2 (\psi_{1,\ell} \psi_{2,y} + \psi_{1,y} \psi_{2,\ell}) + G_1 G_{2,\ell y} + G_2 G_{1,\ell y} \right]. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

By differentiating the evolution equation for the inclusive spectra (3.13) with respect to y and ℓ one gets

$$G_{k,\ell y} = \gamma_0^2 \left(1 - a(\psi_{k,\ell} - \beta\gamma_0^2) \right) G_k, \quad (\text{A.3})$$

where one has used the definition (4.4) (4.5) of $\psi_{k,\ell}$ to replace $\frac{dG_k}{d\ell}$ with $G_k\psi_{k,\ell}$, and (3.15) to evaluate $\frac{d}{d\ell}\gamma_0^2 = -\beta\gamma_0^4$. Inserting (A.3) into (A.2) yields

$$\begin{aligned} \frac{\text{l.h.s. (3.36)}|_{\ell y}}{\gamma_0^2 G_1 G_2} &= (\mathcal{C}_g - 1) \left(2 - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) + \frac{\psi_{1,\ell}\psi_{2,y} + \psi_{1,y}\psi_{2,\ell}}{\gamma_0^2} + 2a\beta\gamma_0^2 \right) \\ &\quad + \mathcal{C}_g(\delta_1 + \delta_2), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where δ_1 and δ_2 are defined in (4.7) (4.8).

Differentiating now the r.h.s. of (3.36) with respect to y_2 and ℓ_1 , one gets

$$\frac{\text{r.h.s. (3.36)}|_{\ell y}}{\gamma_0^2 G_1 G_2} = \mathcal{C}_g(1 - a(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2)) - \mathcal{C}_g a\chi_\ell + (a - b)(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2). \quad (\text{A.5})$$

Equating the expressions (A.4) and (A.5) for the correlation function we derive

$$(\mathcal{C}_g - 1)(1 + \Delta + \delta_1 + a(\chi_\ell + \beta\gamma_0^2) + \delta_2) = 1 - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2) - \delta_1 - (a\chi_\ell + \delta_2), \quad (\text{A.6})$$

which gives (4.2).

B. Derivation of the quark correlator \mathcal{C}_q in (5.2)

B.1 Derivation of (5.2)

The method is the same as in appendix A: one evaluates now $[Q^{(2)} - Q_1 Q_2]_{\ell y} \equiv [\mathcal{C}_q - 1)Q_1 Q_2]_{\ell y}$.

First, by differentiating the evolution equation (3.35), one gets

$$[Q^{(2)} - Q_1 Q_2]_{\ell y} = \frac{C_F}{N_c} \gamma_0^2 \mathcal{C}_g G_1 G_2 \left(1 - \frac{3}{4}(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} + \chi_\ell - \beta\gamma_0^2) \right); \quad (\text{B.1})$$

then, one explicitly differentiates $[(\mathcal{C}_q - 1)Q_1 Q_2]$ and makes use of

$$Q_{k,\ell y} = \frac{C_F}{N_c} \gamma_0^2 G_k \left(1 - \frac{3}{4}(\psi_{k,\ell} - \beta\gamma_0^2) \right), \quad (\text{B.2})$$

which comes directly from differentiating the r.h.s of (3.12) with respect to ℓ and y ; this yields

$$\begin{aligned} [Q^{(2)} - Q_1 Q_2]_{\ell y} &= \mathcal{C}_q Q_1 Q_2 \left[\sigma_\ell(\varphi_{1,y} + \varphi_{2,y}) + \sigma_\ell(\varphi_{1,\ell} + \varphi_{2,\ell}) + \sigma_{\ell y} + \sigma_\ell \sigma_y \right] \\ &\quad + (\mathcal{C}_q - 1) Q_1 Q_2 \gamma_0^2 \left[\varphi_{1,\ell} \varphi_{2,y} + \varphi_{1,y} \varphi_{2,\ell} \right] \\ &\quad + (\mathcal{C}_q - 1) \gamma_0^2 \frac{C_F}{N_c} \left[(G_1 Q_2 + Q_1 G_2) - \frac{3}{4} G_1 Q_2 (\psi_{1,\ell} - \beta\gamma_0^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} Q_1 G_2 (\psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2) \right]; \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

equating (B.1) and (B.3) gives

$$\mathcal{C}_q - 1 = \frac{\frac{N_c}{C_F} \mathcal{C}_g \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} + \chi_\ell - \beta \gamma_0^2) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_1}{Q_1} \frac{C_F}{N_c} \frac{G_2}{Q_2} - \mathcal{C}_q (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2)}{\tilde{\Delta} + \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{1,\ell} - \beta \gamma_0^2) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_1}{Q_1} + \left[1 - \frac{3}{4} (\psi_{2,\ell} - \beta \gamma_0^2) \right] \frac{C_F}{N_c} \frac{G_2}{Q_2}}, \quad (\text{B.4})$$

which leads (5.2).

B.2 Expressing $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\delta}_1$ and $\tilde{\delta}_2$ in terms of gluon-related quantities

All the intricacies of (B.4) lie in $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\delta}_1$ and $\tilde{\delta}_2$ defined in (5.5), which involve the quark related quantities σ and φ (5.6). In what follows, we will express them in terms of the gluon related quantities χ and ψ (4.3) (4.4) (4.5).

B.2.1 Expression for $\tilde{\Delta}$

Differentiating (3.16) with respect to ℓ yields

$$Q_{k,\ell} = \frac{C_F}{N_c} G_{k,\ell} \left[1 + \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell} \right] + \frac{C_F}{N_c} G_k \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell\ell} + \mathcal{O}(\gamma_0^4); \quad (\text{B.5})$$

then

$$\varphi_\ell = \frac{Q_{k,\ell}}{Q_k} = \left\{ \frac{C_F}{N_c} G_{k,\ell} \left[1 + \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell} \right] + \frac{C_F}{N_c} G_k \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell\ell} \right\} \left[G_k^{-1} - \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell} G_k^{-1} \right] \quad (\text{B.6})$$

yields

$$\varphi_{k,\ell} = \psi_{k,\ell} + \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell\ell} + \mathcal{O}(\gamma_0^4). \quad (\text{B.7})$$

Differentiating (3.16) with respect to y yields

$$Q_{k,y} = \frac{C_F}{N_c} G_{k,y} \left[1 + \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell} \right] + \frac{C_F}{N_c} G_k \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell y} + \mathcal{O}(\gamma_0^4), \quad (\text{B.8})$$

and, finally,

$$\varphi_{k,y} = \psi_{k,y} + \left(a - \frac{3}{4} \right) \psi_{k,\ell y} + \mathcal{O}(\gamma_0^4). \quad (\text{B.9})$$

Using (B.7) and (B.9) in $\tilde{\Delta}$ given by (5.5) gives

$$\tilde{\Delta} \approx \Delta + \left(a - \frac{3}{4} \right) \left(\psi_{1,\ell y} \psi_{2,\ell} + \psi_{2,\ell\ell} \psi_{1,y} + \psi_{2,\ell y} \psi_{1,\ell} + \psi_{1,\ell\ell} \psi_{2,y} \right) \gamma_0^{-2}, \quad (\text{B.10})$$

which shows in particular, that $\tilde{\Delta} \approx \Delta + \mathcal{O}(\gamma_0^2)$.

B.2.2 Expression for $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$

Eq. (5.5) entails $\mathcal{C}_q \gamma_0^2 \tilde{\delta}_1 = \mathcal{C}_{q,\ell} (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,y}) + \mathcal{C}_{q,y} (\varphi_{1,\ell} + \varphi_{2,\ell})$; since $\mathcal{C}_{q,\ell}$ and $\mathcal{C}_{q,y}$ are $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$ and considering (B.9) and (B.7), we can approximate

$$\mathcal{C}_q \gamma_0^2 \tilde{\delta}_1 = \mathcal{C}_{q,\ell} (\psi_{1,y} + \psi_{2,y}) + \mathcal{C}_{q,y} (\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell}) + \mathcal{O}(\gamma_0^5), \quad (\text{B.11})$$

which needs evaluating $\mathcal{C}_{q,\ell}$ and $\mathcal{C}_{q,y}$ in terms of gluonic quantities. Actually, since $\mathcal{C}_q\tilde{\delta}_1$ and $\mathcal{C}_q\tilde{\delta}_2$ occur as MLLA and NMLLA corrections in (B.4), it is enough to take the leading (DLA) term of \mathcal{C}_q to estimate them

$$\mathcal{C}_q^{\text{DLA}} = 1 + \frac{N_c}{C_F} \frac{1}{1+\Delta} = 1 - \frac{N_c}{C_F} + \frac{N_c}{C_F} \left(1 + \frac{1}{1+\Delta}\right); \quad (\text{B.12})$$

differentiating then over ℓ and y yields

$$\mathcal{C}_{q,\ell}^{\text{DLA}} = -\frac{N_c}{C_F} \frac{\Delta_\ell}{(1+\Delta)^2} = \frac{N_c}{C_F} \mathcal{C}_{g,\ell}^{\text{DLA}}, \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{C}_{q,y}^{\text{DLA}} = -\frac{N_c}{C_F} \frac{\Delta_y}{(1+\Delta)^2} = \frac{N_c}{C_F} \mathcal{C}_{g,y}^{\text{DLA}}. \quad (\text{B.14})$$

Plugging (B.13), (B.14) into (B.11) one gets

$$\mathcal{C}_q\tilde{\delta}_1 = \mathcal{C}_g\delta_1 + \mathcal{O}(\gamma_0^3). \quad (\text{B.15})$$

Likewise, calculating $\gamma_0^2\mathcal{C}_q\tilde{\delta}_2$ needs evaluating $\mathcal{C}_{q,y}^{\text{DLA}}$ in terms of gluonic quantities. Using (B.13) one gets

$$\mathcal{C}_q\tilde{\delta}_2 = \mathcal{C}_g\delta_2 + \mathcal{O}(\gamma_0^4). \quad (\text{B.16})$$

Accordingly, $\mathcal{C}_q(\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2)$ can be replaced by $\mathcal{C}_g(\delta_1 + \delta_2)$ to get the solution (B.4). This approximation is used to get the MLLA solution (5.10) of (B.4).

C. DLA inspired solution of the MLLA evolution equations for the inclusive spectrum

This appendix completes subsection 4.2. For pedagogical reasons we will estimate the solution of (3.13) when neglecting the running of α_s (constant- γ_0^2) (see [2, 4] and references therein). We perform a Mellin transformation of $G(\ell, y)$

$$G(\ell, y) = \iint_C \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell} e^{\nu y} \mathcal{G}(\omega, \nu). \quad (\text{C.1})$$

The contour C lies to the right of all singularities. In (3.13) one sets the lower bounds for ℓ and y to $-\infty$ since these integrals are vanishing when one closes the C -contour to the right. Using Mellin's representation for $\delta(\ell)$

$$\delta(\ell) = \iint_C \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell} e^{\nu y} \frac{1}{\nu}, \quad (\text{C.2})$$

one gets

$$\mathcal{G}(\omega, \nu) = \frac{1}{\nu - \gamma_0^2(1/\omega - a)}. \quad (\text{C.3})$$

Inserting (C.3) into (C.1) and extracting the pole ($\nu_0 = \gamma_0^2(1/\omega - a)$) from the denominator of (C.3) one gets rid of the integration over ν and obtains the following representation⁶

$$G(\ell, y) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \exp\left[\omega\ell + \gamma_0^2(1/\omega - a)y\right]; \quad (\text{C.4})$$

⁶By making use of Cauchy's theorem.

finally treating ℓ as a large variable (soft approximation $x \ll 1$) allows us to have an estimate of (C.4) by performing the steepest descent method; one then has

$$G(\ell, y) \stackrel{x \ll 1}{\approx} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_0 y^{1/2}}{\pi \ell^{3/2}}} \exp\left(2\gamma_0 \sqrt{\ell} y - a\gamma_0^2 y\right). \quad (\text{C.5})$$

However, since we are interested in getting logarithmic derivatives; in this approximation we can drop the normalization factor of (C.5) which leads to sub-leading corrections that we do not take into account here; we can use instead

$$G(\ell, y) \stackrel{x \ll 1}{\simeq} \exp\left(2\gamma_0 \sqrt{\ell} y - a\gamma_0^2 y\right), \quad (\text{C.6})$$

which is (4.10).

D. Exact solution of the MLLA evolution equation for the inclusive spectrum

We solve (3.13) by performing a Mellin transformation of the following function (γ_0^2 , β and λ are defined in (3.15), (2.6)):

$$F(\ell, y) = \gamma_0^2(\ell + y)G(\ell, y),$$

that is,

$$F(\ell, y) = \iint_C \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell} e^{\nu y} \mathcal{F}(\omega, \nu). \quad (\text{D.1})$$

Plugging (D.1) into (3.13) we obtain:

$$\begin{aligned} \beta(\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell} e^{\nu y} \mathcal{F}(\omega, \nu) &= \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell} e^{\nu y} \left[\frac{1}{\nu} + \frac{\mathcal{F}(\omega, \nu)}{\omega\nu} \right] \\ &\quad - a \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell} e^{\nu y} \frac{\mathcal{F}(\omega, \nu)}{\nu}, \end{aligned}$$

where we have again replaced $\delta(\ell)$ by its Mellin's representation (C.2). Then using the equivalence $\ell \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\omega}$, $y \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\nu}$, we integrate the l.h.s. by parts and obtain:

$$\beta \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\omega} + \frac{\partial}{\partial\nu} + \lambda \right) e^{\omega\ell + \nu y} \right] \mathcal{F}(\omega, \nu) = \beta \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} \left(\lambda \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\omega} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\nu} \right) e^{\omega\ell + \nu y}.$$

We are finally left with the following inhomogeneous differential equation:

$$\beta \left(\lambda \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\omega} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\nu} \right) = \frac{1}{\nu} + \frac{\mathcal{F}}{\omega\nu} - a \frac{\mathcal{F}}{\nu}. \quad (\text{D.2})$$

The variables ω and ν can be changed conveniently to

$$\omega' = \frac{\omega + \nu}{2}, \quad \nu' = \frac{\omega - \nu}{2},$$

such that (D.2) is now decoupled and can be easily solved:

$$\beta \left(\lambda \mathcal{F} - \frac{d\mathcal{F}}{d\omega'} \right) = \frac{1}{\omega' - \nu'} + \frac{\mathcal{F}}{\omega'^2 - \nu'^2} - a \frac{\mathcal{F}}{\omega' - \nu'}.$$

The solution of the corresponding homogeneous equation, written as a function of ω and ν , is the following:

$$\mathcal{F}^h(\omega, \nu) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta}.$$

We finally obtain the exact solution of (3.13) given by the following Mellin's representation:

$$G(\ell, y) = (\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell + \nu y} \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta} e^{-\lambda s}. \quad (\text{D.3})$$

Eq. (D.3) will be estimated using the steepest descent method in a forthcoming work that will treat two particles correlations at $Q_0 \geq \Lambda_{\text{QCD}}$ ($\lambda = \ln(Q_0/\Lambda_{\text{QCD}}) \neq 0$) [10, 11]. Inserting (D.3) into (3.36) one has the Mellin's representation inside a quark jet

$$Q(\ell, y) = (\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell + \nu y} \left(\frac{\gamma_0^2}{\omega\nu} - \frac{3}{4} \frac{\gamma_0^2}{\nu} \right) \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} \times \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta} e^{-\lambda s};$$

where $\gamma_0^2/\omega\nu = \mathcal{O}(1)$ and the second term is the MLLA correction $\gamma_0^2/\nu = \mathcal{O}(\gamma_0)$.

D.1 Limiting spectrum, $\lambda = 0$

We set $\lambda = 0$ (that is $Q_0 = \Lambda_{\text{QCD}}$) in (D.3) and change variables as follows

$$\bar{\omega} = \omega - \nu, \quad s + \bar{\omega}t = \bar{\omega}/u, \quad A \equiv A(\bar{\omega}) = \frac{1}{\beta\bar{\omega}}, \quad B = a/\beta$$

to get ($\ell + y = Y$ is used as a variable)

$$G(\ell, Y) = \int_{\epsilon_1 - i\infty}^{\epsilon_1 + i\infty} \frac{d\bar{\omega}}{2\pi i} x^{-\bar{\omega}} \bar{\omega} Y \int_{\epsilon_2 - i\infty}^{\epsilon_2 + i\infty} \frac{dt}{2\pi i} e^{\bar{\omega} Y t} \left(\frac{t}{1+t} \right)^{-A} t^B \int_0^{t^{-1}} du u^{B-1} (1+u)^{-A}; \quad (\text{D.4})$$

the last integral of (D.4) is the representation of the hypergeometric functions of the second kind (see [16])

$$\int_0^{t^{-1}} du u^{B-1} (1+u)^{-A} = \frac{t^{-B}}{B} {}_2F_1(A, B; B+1; -t^{-1});$$

for $\Re B > 0$, we also have

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!},$$

where for example

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1).$$

Therefore (D.4) can be rewritten in the form:

$$G(\ell, Y) = \frac{Y}{B} \int_{\epsilon_1 - i\infty}^{\epsilon_1 + i\infty} \frac{d\bar{\omega}}{2\pi i} x^{-\bar{\omega}} \bar{\omega} \int_{\epsilon_2 - i\infty}^{\epsilon_2 + i\infty} \frac{dt}{2\pi i} e^{\bar{\omega} Y t} \left(\frac{t}{1+t} \right)^{-A} {}_2F_1(A, B; B+1; -t^{-1}). \quad (\text{D.5})$$

By making use of the identity [17]:

$$(1+t^{-1}) {}_2F_1(-A+B+1, 1; B+1; -t^{-1}) = \left(\frac{t}{1+t} \right)^{-A} {}_2F_1(A, B; B+1; -t^{-1}),$$

we split (D.5) into two integrals. The solution of the second one is given by the hypergeometric function of the first kind [17]:

$$\int_{\epsilon_2 - i\infty}^{\epsilon_2 + i\infty} \frac{dt}{2\pi i} e^{\bar{\omega} Y t} t^{-1} {}_2F_1(-A+B+1, 1; B+1; -t^{-1}) = {}_1F_1(-A+B+1; B+1; -\bar{\omega} Y). \quad (\text{D.6})$$

Taking the derivative of (D.6) over $(\bar{\omega} Y)$ we obtain:

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon_2 - i\infty}^{\epsilon_2 + i\infty} \frac{dt}{2\pi i} e^{\bar{\omega} Y t} {}_2F_1(-A+B+1, 1; B+1; -t^{-1}) \\ = -\frac{d}{d(-\bar{\omega} Y)} {}_1F_1(-A+B+1; B+1; -\bar{\omega} Y), \end{aligned}$$

where,

$${}_1F_1(a; b; x) \equiv \Phi(a; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(b)_n n!}.$$

We finally make use of the identity [17]:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(-A+B+1; B+2; -\bar{\omega} Y) = \frac{B+1}{A} \left[{}_1F_1(-A+B+1; B+1; -\bar{\omega} Y) \right. \\ \left. - \frac{d}{d(-\bar{\omega} Y)} {}_1F_1(-A+B+1; B+1; -\bar{\omega} Y) \right] \end{aligned}$$

to get $({}_1F_1 \equiv \Phi)$:

$$G(\ell, Y) = \frac{Y}{\beta B(B+1)} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} \frac{d\bar{\omega}}{2\pi i} x^{-\bar{\omega}} \Phi(-A+B+1, B+2, -\bar{\omega} Y); \quad (\text{D.7})$$

we can rename $\bar{\omega} \rightarrow \omega$ and set $Y = \ell + y$, which yields

$$\begin{aligned} G(\ell, y) &= \frac{\ell + y}{\beta B(B+1)} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} x^{-\omega} \Phi(-A+B+1, B+2, -\omega(\ell + y)) \\ &= \frac{\ell + y}{\beta B(B+1)} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} e^{-\omega y} \Phi(A+1, B+2, \omega(\ell + y)). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

We thus demonstrated that the integral representation (D.3) is equivalent to (D.7) in the limit $\lambda = 0$. In this problem all functions are derived using (D.8), and one fixes the value of $Y = \ln(Q/Q_0)$ (that is fixing the hardness of the process under consideration), such that each result is presented as a function of the energy fraction in the logarithmic scale $\ell = \ln(1/x)$. As demonstrated in [2, 12], the inclusive spectrum can be obtained using (D.7) and the result is

$$G(\ell, Y) = 2 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \Re \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\pi} e^{-B\alpha} \mathcal{F}_B(\tau, y, \ell) \right), \quad (\text{D.9})$$

where the integration is performed with respect to τ defined by $\alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{Y}{\ell} - 1 \right) + i\tau$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_B(\tau, \ell, Y) &= \left[\frac{\cosh \alpha - \left(1 - \frac{2\ell}{Y}\right) \sinh \alpha}{\frac{Y}{\beta} \frac{\alpha}{\sinh \alpha}} \right]^{B/2} I_B \left(2\sqrt{Z(\tau, \ell, Y)} \right), \\ Z(\tau, \ell, Y) &= \frac{Y}{\beta} \frac{\alpha}{\sinh \alpha} \left[\cosh \alpha - \left(1 - \frac{2\ell}{Y}\right) \sinh \alpha \right]; \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

I_B is the modified Bessel function of the first kind.

D.2 Logarithmic derivatives of the spectrum, $\lambda = 0$

Using the expressions derived in [12] and fixing the sum $\ell + y = Y$, one gets

$$\frac{d}{d\ell} G(\ell, Y) = 2 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\pi} e^{-B\alpha} \left[\frac{1}{Y} (1 + 2e^\alpha \sinh \alpha) \mathcal{F}_B + \frac{1}{\beta} e^\alpha \mathcal{F}_{B+1} \right]; \quad (\text{D.11})$$

and

$$\frac{d}{dy} G(\ell, Y) = 2 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\pi} e^{-B\alpha} \left[\frac{1}{Y} (1 + 2e^\alpha \sinh \alpha) \mathcal{F}_B + \frac{1}{\beta} e^\alpha \mathcal{F}_{B+1} - \frac{2 \sinh \alpha}{Y} \mathcal{F}_{B-1} \right]. \quad (\text{D.12})$$

Logarithmic derivatives ψ_ℓ and ψ_y are then constructed according to their definition (4.4) (4.5) by dividing (D.11) and (D.12) by the inclusive spectrum (D.9).

Using the expression of Bessel's series, one gets

- for $\ell \rightarrow 0$;

$$\begin{aligned} \psi_\ell &\stackrel{\ell \rightarrow 0}{\simeq} \frac{a}{\beta \ell} + c_1 \ln \left(\frac{Y}{\ell} - 1 \right) \rightarrow \infty, \\ c_1 &= \frac{2^{a/\beta+2}}{\pi(a+2\beta)} \int_0^{\pi/2} d\tau (\cos \tau)^{a/\beta+2} \left[\cos \left(\frac{a}{\beta} \tau \right) - \tan \tau \sin \left(\frac{a}{\beta} \tau \right) \right] \\ &= 0.4097 > 0, \\ \psi_y &\stackrel{\ell \rightarrow 0}{\simeq} -a\gamma_0^2 + c_1 \frac{\ell}{y} \rightarrow -a\gamma_0^2. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

- for $\ell \rightarrow Y \Leftrightarrow y \rightarrow 0$;

$$\psi_\ell \stackrel{y \rightarrow 0}{\simeq} c_2 \left(\frac{Y}{\ell} - 1 \right) \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{2^{a/\beta+2}}{\pi(a+2\beta)} \int_0^{\pi/2} d\tau (\cos \tau)^{a/\beta+2} \left[\cos\left(\frac{a}{\beta}\tau\right) + \tan \tau \sin\left(\frac{a}{\beta}\tau\right) \right] \\
 &= 0.9218 > 0; \\
 \psi_y &\stackrel{y \rightarrow 0}{\simeq} -c_2 \ln\left(\frac{Y}{\ell} - 1\right) \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

They are represented in figure 12 as functions of ℓ for two different values of Y ($= 5.2, 15$).

D.3 Double derivatives

In the core of this paper we also need the expression for $\psi_{\ell,\ell}$

$$\psi_{\ell\ell} = \frac{1}{G} G_{\ell\ell} - (\psi_\ell)^2. \tag{D.15}$$

By differentiating twice (D.8) with respect to ℓ , one gets

$$\begin{aligned}
 G_{\ell\ell}(\ell, y) &= \frac{2}{\ell + y} \left(G_\ell(\ell, y) - \frac{1}{\ell + y} G(\ell, y) \right) \\
 &\quad + \frac{(\ell + y)\Gamma(B)}{\beta\Gamma(B+3)} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} e^{-\omega y} \omega^2 (A^2 + 3A + 2) \Phi(A+3, B+4; \omega(\ell+y)).
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

Using the procedure of [12] (appendix A.2) and setting $y = Y - \ell$, the result for $G_{\ell\ell}$ reads

$$\begin{aligned}
 G_{\ell\ell}(\ell, Y) &= \frac{2}{Y} \left(G_\ell(\ell, Y) - \frac{1}{Y} G(\ell, Y) \right) \\
 &\quad + 2 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\pi} e^{-(B-2)\alpha} \left[\frac{1}{\beta^2} \mathcal{F}_{B+2} + \frac{6}{\beta Y} \sinh \alpha \mathcal{F}_{B+1} + \frac{8}{Y^2} \sinh^2 \alpha \mathcal{F}_B \right].
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Likewise, for

$$\psi_{yy} = \frac{1}{G} G_{yy} - (\psi_y)^2, \tag{D.18}$$

where

$$\begin{aligned}
 G_{yy}(\ell, y) &= \gamma_0^2 G(\ell, y) + \frac{1}{Y} \left(G_y(\ell, y) - G_\ell(\ell, y) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \frac{(\ell + y)\Gamma(B)}{\Gamma(B+2)} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} e^{-\omega y} \left(\omega^2 - \frac{\omega}{\beta} \right) \Phi(A+1, B+3; \omega(\ell+y)),
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

one gets

$$\begin{aligned}
 G_{yy}(\ell, Y) &= \gamma_0^2 G(\ell, Y) + \frac{1}{Y} \left(G_y(\ell, Y) - G_\ell(\ell, Y) \right) \\
 &\quad + 4 \frac{\Gamma(B)}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\pi} e^{-(B+1)\alpha} \left[2(B+1) \frac{\sinh^2 \alpha}{Y^2} \mathcal{F}_{B-1} - \frac{1}{\beta} \frac{\sinh \alpha}{Y} \mathcal{F}_B \right].
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Finally,

$$\psi_{\ell y} = \psi_{y\ell} = \gamma_0^2 [1 - a(\psi_\ell - \beta\gamma_0^2)] - \psi_\ell \psi_y.$$

$\psi_{\ell\ell}$, ψ_{yy} and $\psi_{\ell y}$ are drawn in figure 13 of appendix E.1.1 as functions of ℓ for fixed Y . They are all $\mathcal{O}(\gamma_0^3)$.

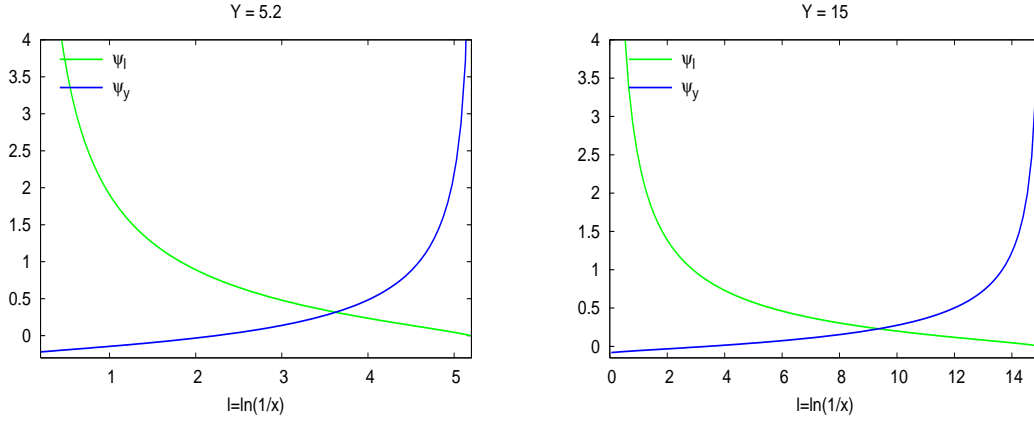


Figure 12: Derivatives ψ_ℓ and ψ_y as functions of ℓ at fixed $Y = 5.2$ (left) and $Y = 15$ (right)

E. Numerical analysis of corrections

In this section, we present plots for the derivatives of ψ , and φ (see (4.4) (4.5) and (5.6)), for Υ and its derivatives (see (6.1) (6.2)), for Δ , δ_1 , δ_2 (see (4.3)-(4.8)) and the combination $\delta_c \equiv \delta_1 + \delta_2 + a\Upsilon_\ell$, $\tilde{\delta}_c \equiv \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2$.

E.1 Gluon jet

E.1.1 ψ and its derivatives

This subsection is associated with appendices D.2 and D.3 . It enables in particular to visualize the behaviors of ψ_ℓ and ψ_y when $\ell \rightarrow 0$ or $y \rightarrow 0$, as described in (D.13) and (D.14), and to set the ℓ interval within which our calculation can be trusted.

In figure 12 are drawn ψ_ℓ and ψ_y as functions of ℓ for two values $Y = 5.2$ corresponding to LEP working conditions, and $Y = 15$ corresponding to an unrealistic “high energy limit”.

ψ_ℓ and (ψ_y) being both $\mathcal{O}(\gamma_0)$, they should not exceed a “reasonable value”; setting this value to 1, $|\psi_\ell| < 1$ and $|\psi_y| < 1$ set, for $Y = 5.2$, a confidence interval

$$2.5 \leq \ell \leq 4.5. \quad (\text{E.1})$$

In the high energy limit $Y = 15$, this interval becomes, $4.5 \leq \ell \leq 13$, in agreement with 4.5.

E.1.2 $\Delta(\ell_1, \ell_2, Y)$

Δ has been defined in (4.6), in which $\psi_{1,\ell}$ and $\psi_{1,y}$ are functions of ℓ_1 and Y , $\psi_{2,\ell}$ and $\psi_{2,y}$ are functions of ℓ_2 and Y .

Studying the limits $\ell \rightarrow 0$ and $\ell \rightarrow Y$ of subsection D.2:

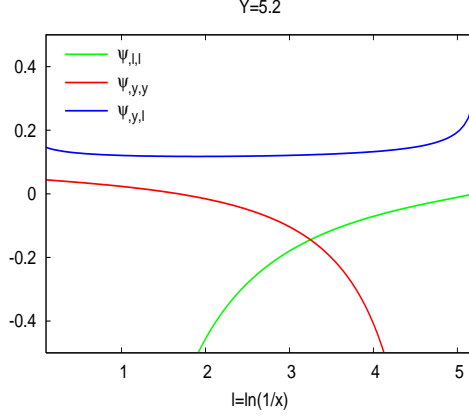


Figure 13: Double derivatives $\psi_{\ell\ell}$, $\psi_{\ell y}$ and ψ_{yy} as functions of ℓ at fixed Y

- for $\ell_1, \ell_2 \rightarrow Y$ one gets (using the results of D.2)

$$\Delta \simeq -c_2^2 \left(\frac{Y - \ell_1}{\ell_1} \ln \frac{Y - \ell_2}{\ell_2} + \frac{Y - \ell_2}{\ell_2} \ln \frac{Y - \ell_1}{\ell_1} \right), \quad (\text{E.2})$$

such that

$$\Delta \xrightarrow{\ell_1 - \ell_2 \rightarrow 0} 0, \quad \Delta \xrightarrow{\ell_1 - \ell_2 \rightarrow \infty} +\infty. \quad (\text{E.3})$$

- for $\ell_1, \ell_2 \rightarrow 0$ one gets (according to D.2):

$$\Delta \simeq -a\gamma_0^2 \left[\frac{a}{\beta} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right) + c_1 \left(\ln \frac{Y - \ell_1}{\ell_1} + \ln \frac{Y - \ell_2}{\ell_2} \right) \right] \rightarrow -\infty. \quad (\text{E.4})$$

In figure 14 (left) Δ is plotted as a function of $\ell_1 + \ell_2$ for three different values of $\ell_1 - \ell_2$ (0.1, 0.5, 1.0); the condition (E.1) translates into

$$5.0 \leq \ell_1 + \ell_2 \leq 9.0; \quad (\text{E.5})$$

on figure 14 (right) the asymptotic limit $\Delta \rightarrow 2$ for very large Y clearly appears (we have taken $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$); it is actually its DLA value [2]; this is not surprising since, in the high energy limit γ_0 becomes very small and sub-leading corrections (hard corrections and running coupling effects) get suppressed.

E.1.3 Υ_g and its derivatives

Figure 15 exhibits the smooth behavior of $\exp(\Upsilon_g)$ as a function of $(\ell_1 + \ell_2)$ in the whole range of applicability of our approximation (we have chosen the same values of $(\ell_1 - \ell_2)$ as for figure 14), and as a function of $(\ell_1 - \ell_2)$ for three values of $(\ell_1 + \ell_2)$ (6.0, 7.0, 8.0). So, the iterative procedure is safe and corrections remain under control.

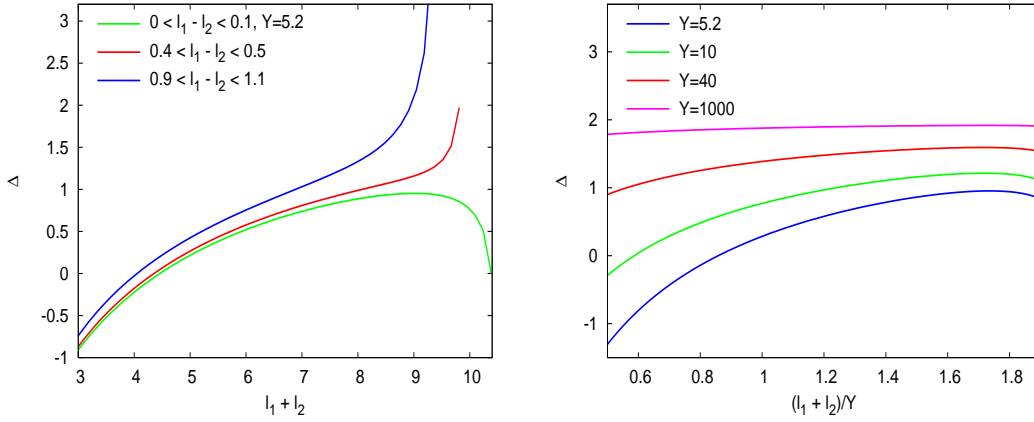


Figure 14: Δ as a function of $\ell_1 + \ell_2$ for $Y = 5.2$ (left) and its asymptotic behavior (right, $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$)

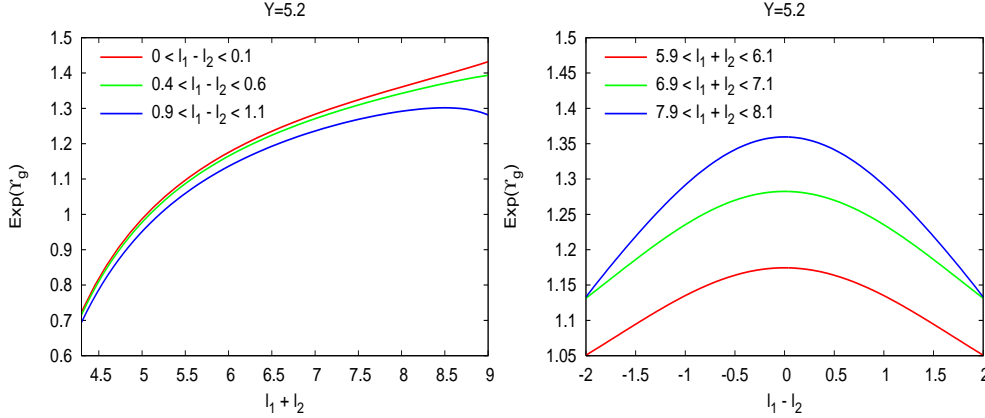


Figure 15: $\exp(\Upsilon_g)$ as a function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and, $\ell_1 - \ell_2$ (right) for $Y = 5.2$

Figure 16 displays the derivatives of Υ_g . (E.6), (E.6) and (E.7) have been plotted at $Y = 5.2$, for $(\ell_1 - \ell_2) = 0.1$ (left) and $(\ell_1 - \ell_2) = 1.0$ (right). The size and shape of these corrections agree with our expectations ($\Upsilon_{g,\ell} = \Upsilon_{g,y} = \mathcal{O}(\gamma_0^2)$, $\Upsilon_{g,\ell y} = \mathcal{O}(\gamma_0^4)$).

For explicit calculations, we have used

$$\Upsilon_{g,\ell} = -\frac{[1 - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2)](\Delta_\ell - a\beta^2\gamma_0^4)}{(1 + \Delta + a\beta\gamma_0^2)[2 + \Delta - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2)]} - \frac{b(\psi_{1,\ell\ell} + \psi_{2,\ell\ell} + \beta^2\gamma_0^4)}{2 + \Delta - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2)}, \quad (\text{E.6})$$

$$\Upsilon_{g,y} = -\frac{[1 - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2)](\Delta_y - a\beta^2\gamma_0^4)}{(1 + \Delta + a\beta\gamma_0^2)[2 + \Delta - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2)]} - \frac{b(\psi_{1,\ell y} + \psi_{2,\ell y} + \beta^2\gamma_0^4)}{2 + \Delta - b(\psi_{1,\ell} + \psi_{2,\ell} - \beta\gamma_0^2)}, \quad (\text{E.7})$$

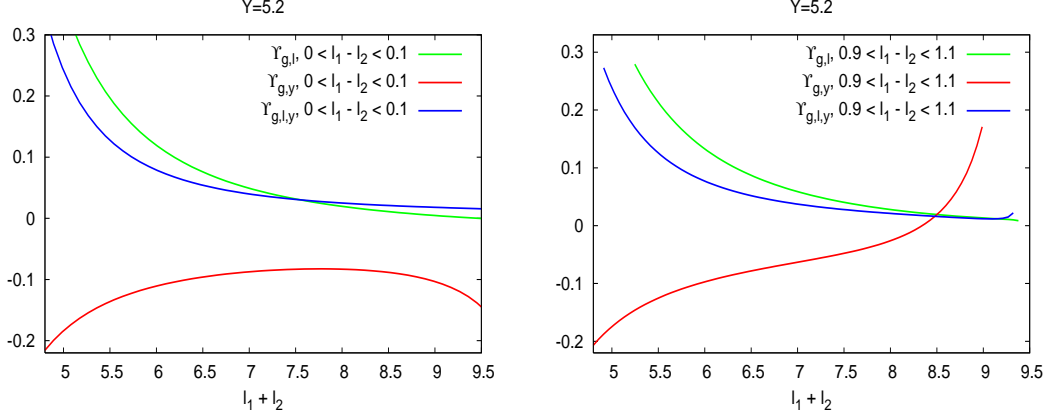


Figure 16: $\Upsilon_{g,\ell}$, $\Upsilon_{g,y}$ and $\Upsilon_{g,\ell y}$ as functions of $\ell_1 + \ell_2$ for $Y = 5.2$, $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$ (left) and $\ell_1 - \ell_2 = 1.0$ (right)

$$\Upsilon_{g,\ell y} = \frac{\partial \Upsilon_{g,y}}{\partial \ell}, \quad (\text{E.8})$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_\ell &= \gamma_0^{-2} [\psi_{1,\ell} \psi_{2,y} + \psi_{1,\ell} \psi_{2,y} \ell + \psi_{2,\ell} \psi_{1,y} + \psi_{2,\ell} \psi_{1,y} \ell] + \beta \gamma_0^2 \Delta, \\ \Delta_y &= \gamma_0^{-2} [\psi_{1,\ell y} \psi_{2,y} + \psi_{1,\ell} \psi_{2,y y} + \psi_{2,\ell y} \psi_{1,y} + \psi_{2,\ell} \psi_{1,y y}] + \beta \gamma_0^2 \Delta. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

For the expressions of $\psi_{\ell\ell}$, $\psi_{\ell y} = \psi_y \ell$ and ψ_{yy} , the reader is directed to D.3. (E.7) has been computed numerically (its analytical expression is too heavy to be easily manipulated).

E.1.4 δ_1 , δ_2 , δ_c

δ_1 and δ_2 are defined in (4.3)–(4.8). We also define

$$\delta_c = \delta_1 + \delta_2 + a \Upsilon_\ell, \quad (\text{E.10})$$

which appears in the numerator of the first line of (4.2).

Figure 17 displays the behavior of δ_1 , δ_2 and $\delta_1 + \delta_2$ at $Y = 5.2$ for $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$ and $\ell_1 - \ell_2 = 1.0$. We recall that these curves can only be reasonably trusted in the interval (E.5).

Though $|\delta_1| = \mathcal{O}(\gamma_0)$ (MLLA) should be numerically larger than $|\delta_2| = \mathcal{O}(\gamma_0^2)$ (NMLLA), it turns out that for relatively large $\gamma_0 \sim 0.5$ ($Y=5.2$), $|\delta_1| \sim |\delta_2|$, and that strong cancellations occur in their sum. As γ_0 decreases (or Y increases) $|\delta_1| \gg |\delta_2|$, in agreement with the perturbative expansion conditions.

In figure 18 we represent δ_c for different values of Y ; it shows how the sum of corrections (MLLA and NMLLA) stay under control in the confidence interval (E.5). For $Y = 5.2$ one reaches a regime where it becomes slightly larger than 0.1 away from the region $x_1 \approx x_2$ (see upper curve on the right of figure 18) but still, since 1 (which is the leading term in the numerator of (4.2)) $\gg 0.1$, our approximation can be trusted.

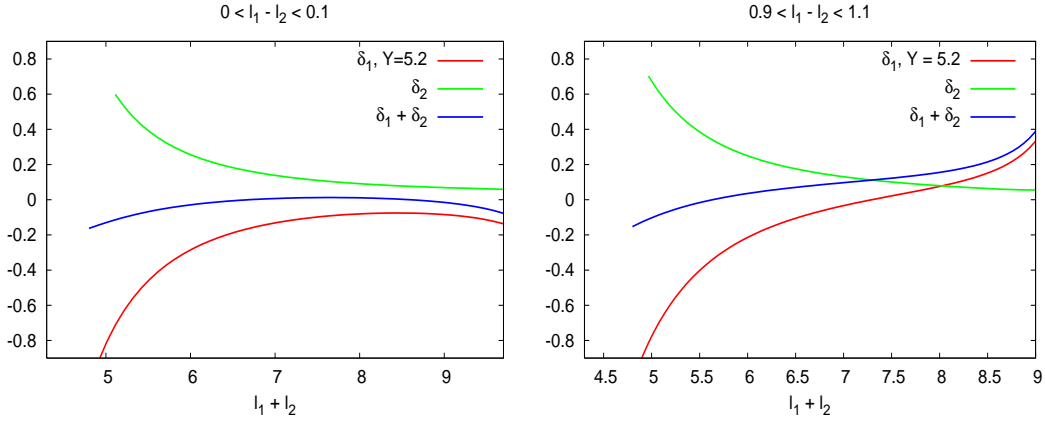


Figure 17: δ_1 , δ_2 and $\delta_1 + \delta_2$ as functions of $\ell_1 + \ell_2$ for $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$ (left) and $\ell_1 - \ell_2 = 1.0$ (right)

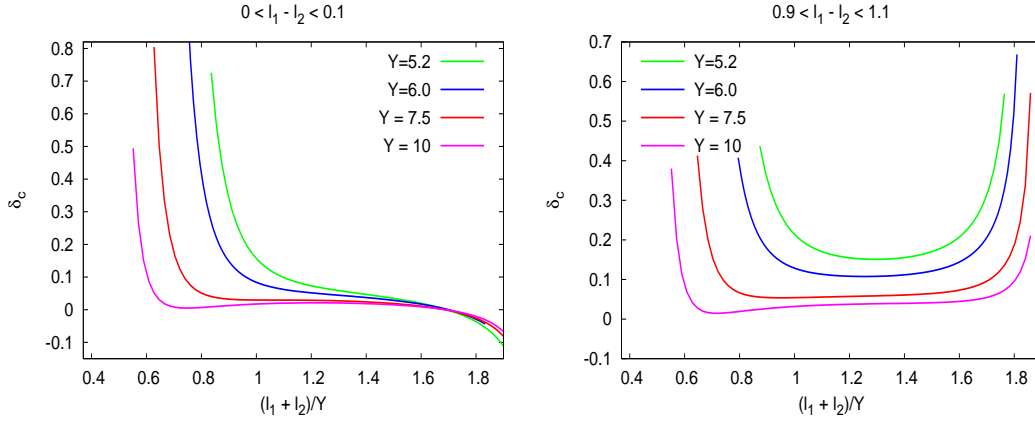


Figure 18: δ_c as a function of $(\ell_1 + \ell_2)/Y$ for $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$ (left) and $\ell_1 - \ell_2 = 1.0$ (right)

E.1.5 The global role of corrections in the iterative procedure

Figure 19 shows the role of δ_c on the correlation function: we represent the bare function $\exp \Upsilon_g$ (see 6.1) as in figure 15, together with (4.2). For $(\ell_1 - \ell_2) = 0.1$ ($\ell_1 \approx \ell_2$) and $(\ell_1 - \ell_2) = 1.0$, it is shown how δ_c modifies the shape and size of $\exp \Upsilon_g$. When $\ell_1 \neq \ell_2$ ($(\ell_1 - \ell_2) = 1.0$), δ_c decreases the correlations. They are also represented as a function of $(\ell_1 - \ell_2)$ when $(\ell_1 + \ell_2)$ is fixed (to 6.0 and 7.0). The increase of δ_c as one goes away from the diagonal $\ell_1 \approx \ell_2$ (see figure 18 for $(\ell_1 - \ell_2) = 1.0$) explains the difference between the green and blue curves; this substantially modifies the tail of the correlations.

When Y gets larger, the role of δ_c decreases: at $Y = 7.5$ (LHC conditions) the difference between the two curves becomes negligible.

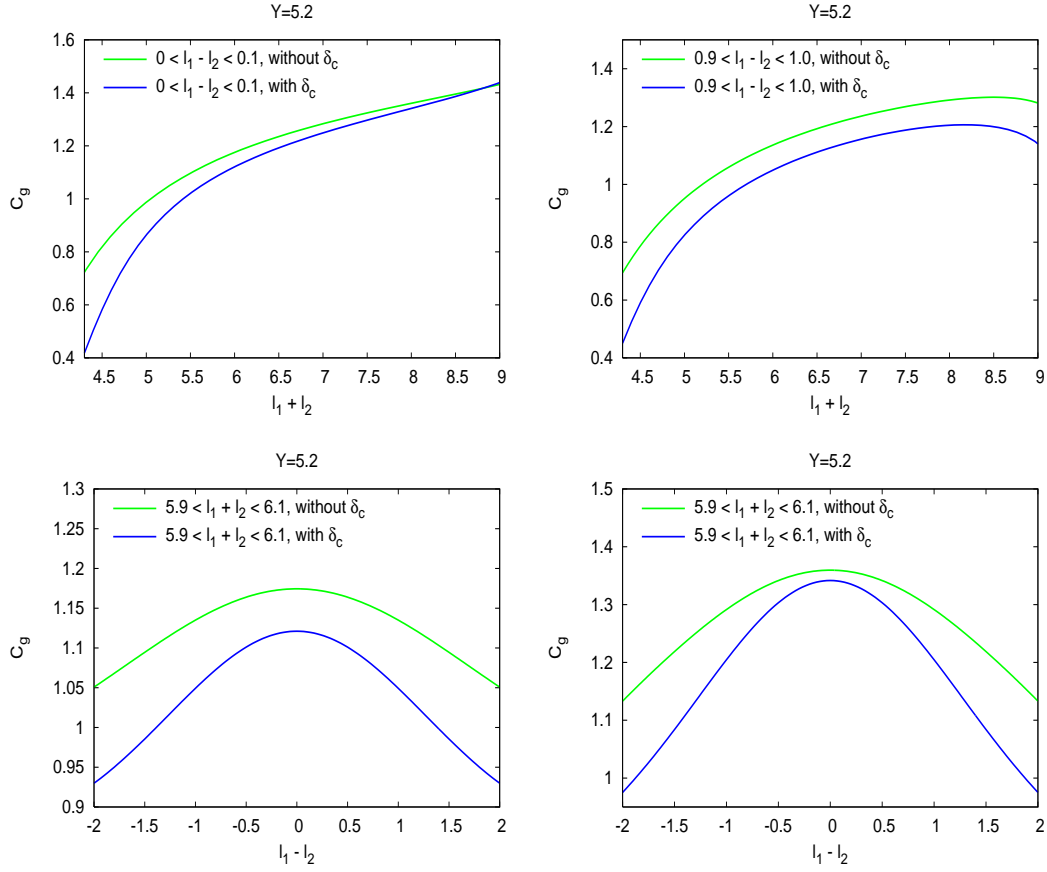


Figure 19: C_g (blue) compared with $\exp Y_g$ (green)

E.2 Quark jet

E.2.1 φ and its derivatives

Figure 20 displays the derivatives φ_ℓ and φ_y together with those ψ_ℓ and ψ_y for the gluon jet, at $Y = 5.2$. Their sizes and shapes are the same since the logarithmic derivatives of the single inclusive distributions inside a gluon or a quark jet only depend on their shapes (the normalizations cancel in the ratio), which is the same in both cases. The mismatch at small ℓ between φ_ℓ and ψ_ℓ stems from the behavior of $\psi_{\ell\ell} \psi_{\ell\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} -\infty$. Therefore, in the interval of applicability of the soft approximation (B.7) and (B.9) can be approximated by ψ_ℓ and ψ_y respectively.

E.2.2 $\tilde{\Delta}(\ell_1, \ell_2, Y)$

The last statement in E.2.1 numerically supports the approximation (B.10), that is

$$\tilde{\Delta} \approx \Delta + \mathcal{O}(\gamma_0^2).$$

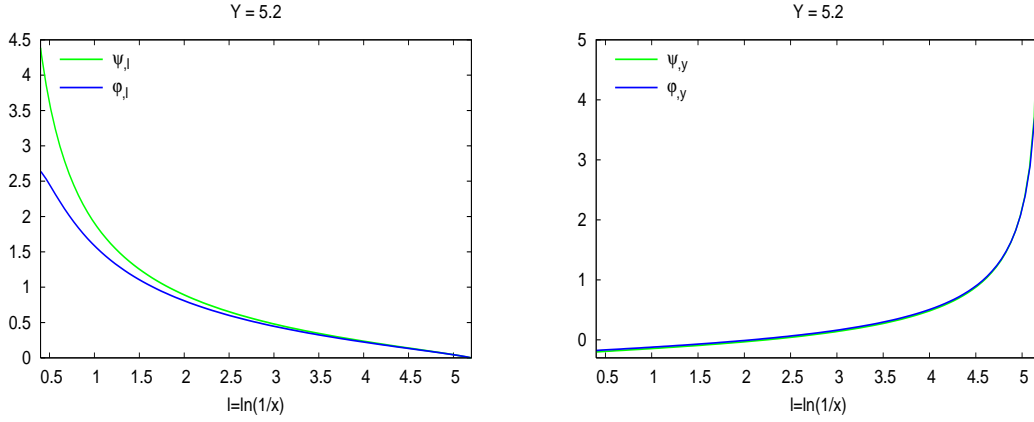


Figure 20: Derivatives $\varphi_{g,\ell}$ and φ_{gy} as functions of ℓ at fixed $Y = 5.2$ (left), compared with ψ_ℓ and ψ_y

We get rid of the heavy $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$ factor in (B.10) to ease our numerical calculations. Hence, the behavior of $\tilde{\Delta}$ is already given in figure 14.

E.2.3 Υ_q and its derivatives

The smooth behavior of $\exp \Upsilon_q$ is displayed in figure 21 as a function of the sum $(\ell_1 + \ell_2)$ for fixed $(\ell_1 - \ell_2)$ and vice versa. The normalization of $(\exp \Upsilon_q - 1)$ is roughly twice ($\times \frac{N_c}{C_F} \approx 2$) as large as that of $(\exp \Upsilon_g - 1)$. We then consider derivatives of this expression to get the corresponding iterative corrections shown in figure 22. The behavior of $\Upsilon_{q,\ell}(\mathcal{O}(\gamma_0^2))$, $\Upsilon_{q,y}(\mathcal{O}(\gamma_0^2))$ and $\Upsilon_{q,\ell y}(\mathcal{O}(\gamma_0^4))$ is in good agreement with our expectations as far as the order of magnitude and the normalization are concerned (see also figure 16).⁷

E.2.4 $\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$ and $\tilde{\delta}_c$

We define

$$\tilde{\delta}_c = \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2$$

as it appears in both the numerator and denominator of (5.2). In figure 23 are displayed $\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$ and their sum $\tilde{\delta}_c$ as functions of the sum $(\ell_1 + \ell_2)$ at fixed $(\ell_1 - \ell_2)$ ($\ell_1 - \ell_2 = 0.1$, left) ($\ell_1 - \ell_2 = 1.0$, right).

At $Y = 5.2$, which corresponds to $\gamma_0 \approx 0.5$, the relative magnitude of $\tilde{\delta}_1$ and $\tilde{\delta}_2$ is inverted⁸ with respect to what is expected from respectively MLLA and NMLLA corrections (see subsection 4.2). This is the only hint that, at this energy, the expansion should be pushed to include all NMLLA corrections to be reliable.

⁷It is also important to remark that $\Upsilon_{q,\ell}$, $\Upsilon_{q,\ell}$, $\Upsilon_{q,\ell y}$ are $\times \frac{N_c}{C_F} \Upsilon_{g,\ell}$, $\Upsilon_{g,\ell}$, $\Upsilon_{g,\ell y}$.

⁸It has been numerically investigated that the expected relative order of magnitude of $\tilde{\delta}_1$ and $\tilde{\delta}_2$ is recovered for $Y \geq 8.0$ (this value can be eventually reached at LHC).

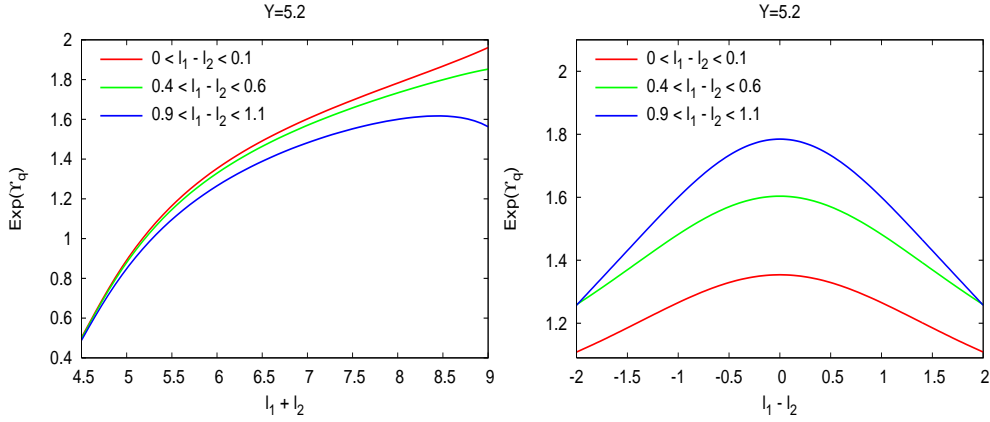


Figure 21: $\exp(\Upsilon_q)$ as a function of $\ell_1 + \ell_2$ (left) and, $\ell_1 - \ell_2$ (right) for $Y = 5.2$

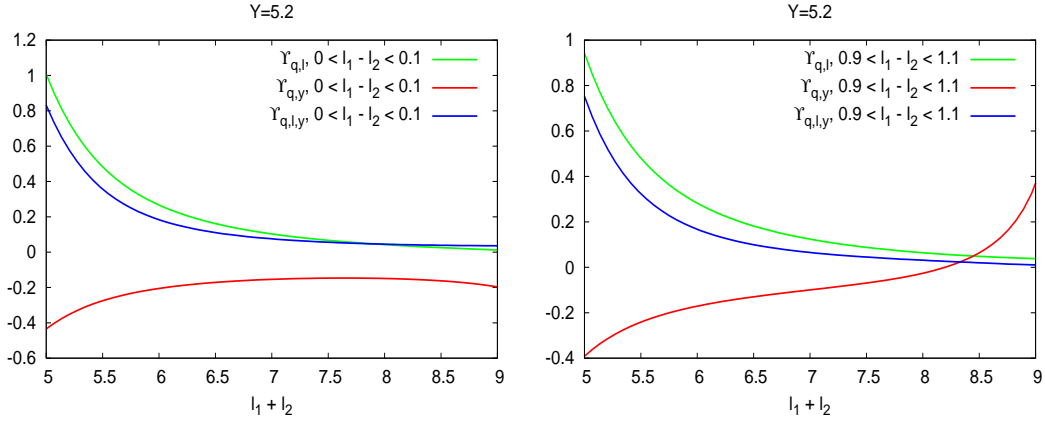


Figure 22: Corrections $\Upsilon_{q,\ell}$, $\Upsilon_{q,y}$ and $\Upsilon_{q,\ell,y}$ as functions of $\ell_1 + \ell_2$ for $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$ (left) and $\ell_1 - \ell_2 = 1.0$ (right) at $Y = 5.2$

Large cancellations are, like for gluons, seen to occur in $\tilde{\delta}_c$, making the sum of corrections quite small. In order to study the behavior of $\tilde{\delta}_c$ as Y increases, it is enough to look at figure 24 where we compare $\tilde{\delta}_c$ at $Y = 5.2, 6.0, 7.5$.

E.2.5 Global role of corrections in the iterative procedure

It is displayed in figure 25. $\tilde{\delta}_c$ does not affect $\exp \Upsilon_q$ near the main diagonal ($\ell_1 = \ell_2$), but it does far from it. We find the same behavior as in the case of a gluon jet.

F. Comparing DLA and MLLA correlations

In figure 26 we compare the quark correlator at DLA and MLLA. The large gap between

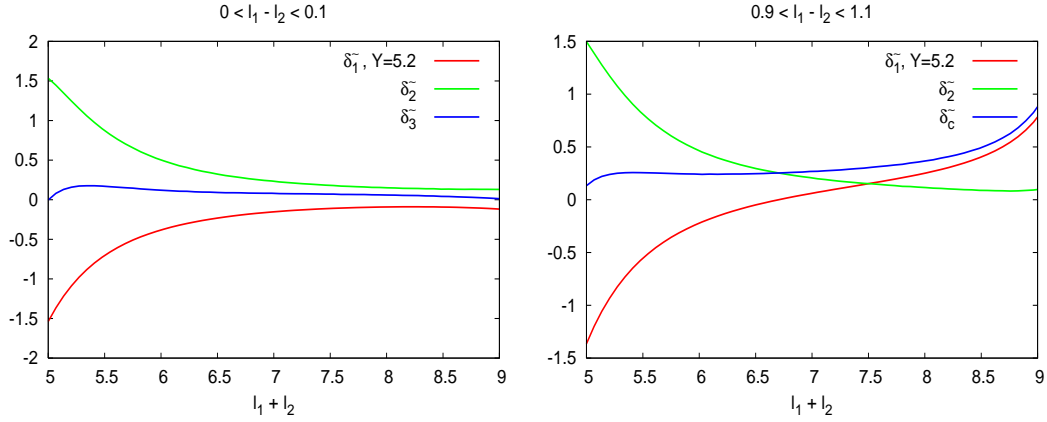


Figure 23: $\tilde{\delta}_1^-$, $\tilde{\delta}_2^-$ and $\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2$ as functions of $\ell_1 + \ell_2$ for $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$ (left) and $\ell_1 - \ell_2 = 1.0$ (right) at $Y = 5.2$

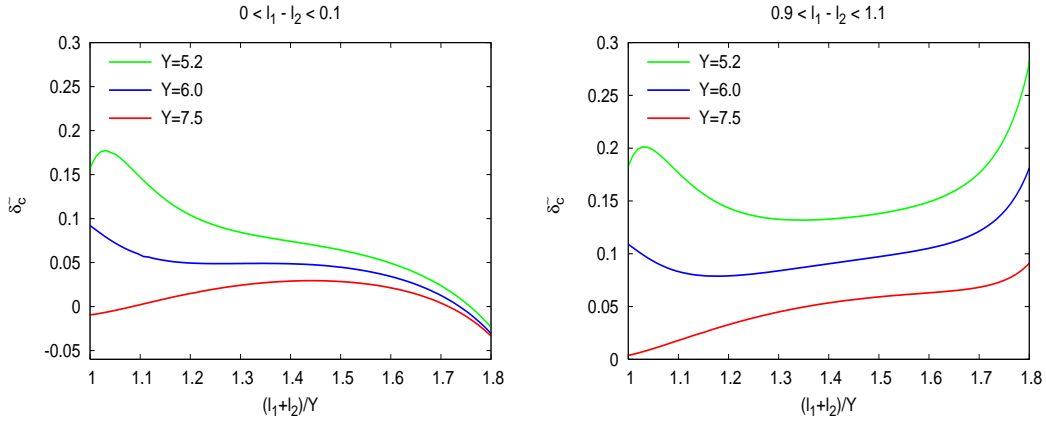


Figure 24: $\tilde{\delta}_c^-$ as a function of $(\ell_1 + \ell_2)/Y$ for $\ell_1 - \ell_2 = 0.1$ (left) and $\ell_1 - \ell_2 = 1.0$ (right) at $Y = 5.2, 6.0, 7.5$

the two curves accounts for the energy balance that is partially restored in MLLA by introducing hard corrections in the partonic evolution equations (terms $\propto a$, b and $\frac{3}{4}$); the DLA curve is obtained by setting a , b and $\frac{3}{4}$ to zero in (4.2) and (5.2); C_q is a practically constant function of $\ell_1 + \ell_2$ in almost the whole range, and decreases when $\ell_1 + \ell_2 \rightarrow 2Y$ by the running of α_s . The MLLA increase of C_q with $\ell_1 + \ell_2$ follows from energy conservation. Similar results are obtained for C_g .

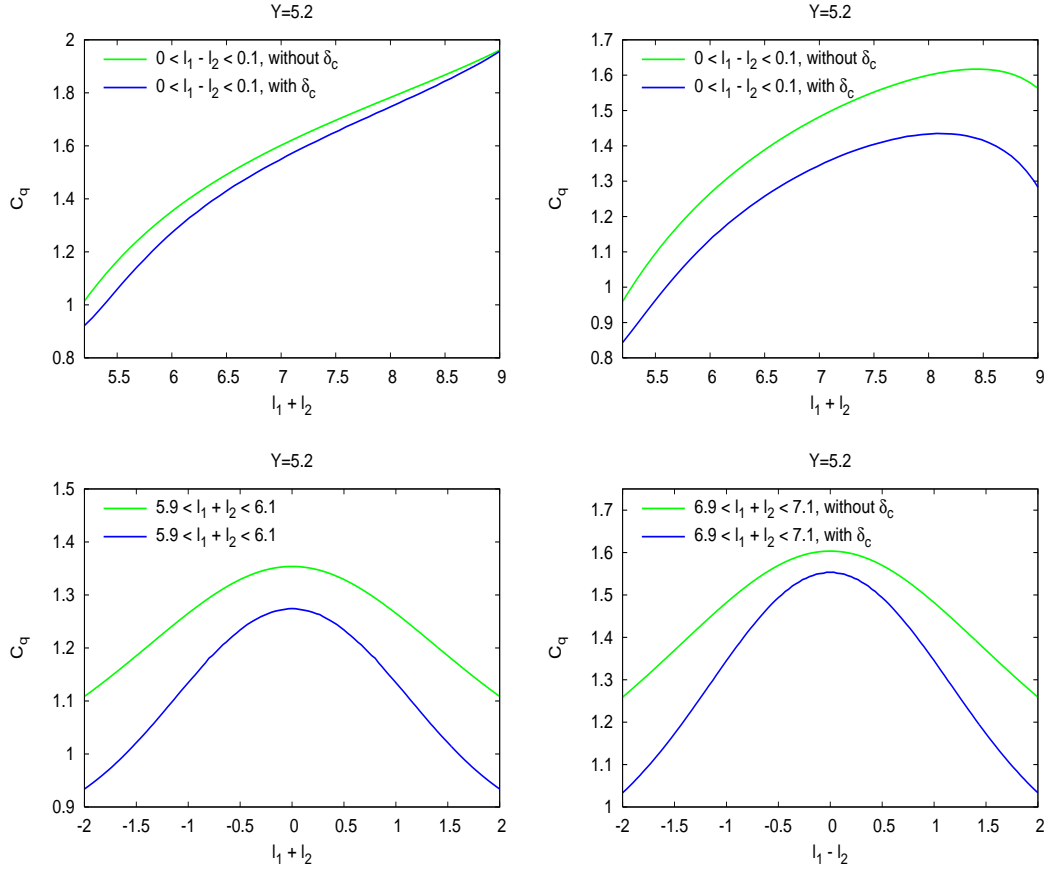


Figure 25: C_q (blue) compared with $\exp \Upsilon_q$ (green)

References

- [1] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, *Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 438;
 e^+e^- pair annihilation and deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 675;
L.N. Lipatov, *The parton model and perturbation theory*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** (1975) 94;
A.P. Bukhvostov, L.N. Lipatov and N.P. Popov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** (1975) 286;
G. Altarelli and G. Parisi, *Asymptotic freedom in parton language*, *Nucl. Phys.* **B 126** (1977) 298;
Y.L. Dokshitzer, *Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics. (In russian)*, *Sov. Phys. JETP* **46** (1977) 641.
- [2] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, A.H. Mueller and S.I. Troyan, *Basics of Perturbative QCD*, Editions Frontières, Paris, 1991.

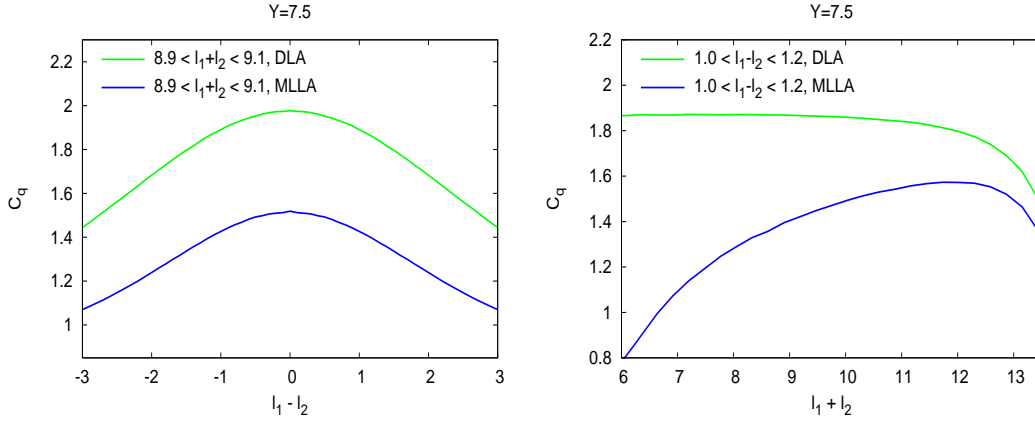


Figure 26: Comparing DLA and MLLA correlations

- [3] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, S.I. Troian and A.H. Mueller, *QCD coherence in high-energy reactions*, *Rev. Mod. Phys.* **60** (1988) 373.
- [4] V.A. Khoze and W. Ochs, *Perturbative QCD approach to multiparticle production*, *Int. J. Mod. Phys. A* **12** (1997) 2949 [[hep-ph/9701421](#)].
- [5] Yu.L. Dokshitzer, V.S. Fadin and V.A. Khoze, *On the sensitivity of the inclusive distributions in parton jets to the coherence effects in QCD gluon cascades*, *Z. Physik C* **18** (1983) 37.
- [6] C.P. Fong and B.R. Webber, *Two particle correlations at small x in QCD jets*, *Phys. Lett. B* **241** (1990) 255.
- [7] OPAL collaboration, P.D. Acton et al., *A study of two particle momentum correlations in hadronic Z^0 decays*, *Phys. Lett. B* **287** (1992) 401.
- [8] K. Konishi, A. Ukawa and G. Veneziano, *Jet calculus: a simple algorithm for resolving QCD jets*, *Nucl. Phys. B* **157** (1979) 45.
- [9] OPAL collaboration, M.Z. Akrawy et al., *A study of coherence of soft gluons in hadron jets*, *Phys. Lett. B* **247** (1990) 617;
TASSO collaboration, W. Braunschweig et al, *Z. Physik C* **47** (1990) 198;
L3 collaboratio, B. Adeva et al., L3 Preprint 025 (1991).
- [10] R. Perez-Ramos: *Two particle correlations inside one jet at ‘Modified leading logarithmic approximation’ of quantum chromodynamics, II. Steepest descent evaluation*, to appear.
- [11] R. Perez-Ramos, Thèse de Doctorat, Université Denis Diderot - Paris 7 (2006).
- [12] R. Perez-Ramos and B. Machet, *MLLA inclusive hadronic distributions inside one jet at high energy colliders*, *JHEP* **04** (2006) 043 [[hep-ph/0512236](#)].
- [13] C.P. Fong and B.R. Webber, *Higher order QCD corrections to hadron energy distributions in jets*, *Phys. Lett. B* **229** (1989) 289.
- [14] E.D. Malaza and B.R. Webber, *Multiplicity distributions in quark and gluon jets*, *Nucl. Phys. B* **267** (1986) 702.

C.3 Single inclusive distribution and 2-particle correlations inside one jet at “Modified Leading Logarithmic Approximation” of Quantum Chromodynamics ; II : Steepest descent evaluation at small x

Single inclusive distribution and two-particle correlations inside one jet at “modified leading logarithmic approximation” of quantum chromodynamics

II. Steepest descent evaluation at small x

Redamy Perez-Ramos

*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies**

Unité Mixte de Recherche UMR 7589

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6;

CNRS;

Université Denis Diderot-Paris 7, France

E-mail: perez@lpthe.jussieu.fr

ABSTRACT: The MLLA single inclusive distribution inside one high energy (gluon) jet at small x is estimated by the steepest descent method. Its analytical expression is obtained outside the “limiting spectrum”. It is then used to evaluate 2-particle correlations at the same level of generality. The dependence of both observables on the ratio between the infrared cutoff Q_0 and Λ_{QCD} is studied. Fong & Webber’s results for correlations are recovered at the limits when this ratio goes to 1 and when one stays close to the peak of the single inclusive distribution.

KEYWORDS: QCD, Jets.

*LPTHE, tour 24-25, 5^{ème} étage, Université P. et M. Curie, BP 126, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 (France).

Contents

1. Introduction	1
2. Steepest descent evaluation of the single inclusive distribution	2
2.1 Variables and kinematics	2
2.2 Evolution equations for particle spectra at MLLA	2
2.3 Evolution equations; steepest descent evaluation	3
2.3.1 Shape of the spectrum given in eq. (2.18)	5
2.4 Logarithmic derivatives	5
2.4.1 “Limiting spectrum”: $\lambda \rightarrow 0$ ($Q_0 = \Lambda_{\text{QCD}}$)	8
3. 2-Particle correlations inside one jet at $\lambda \neq 0$ ($Q_0 \neq \Lambda_{\text{QCD}}$)	8
3.1 Variables and kinematics	9
3.2 MLLA evolution equations for correlations	9
3.3 MLLA solution at $\lambda \neq 0$	10
3.3.1 Gluon jet	10
3.3.2 Quark jet	11
3.4 Sensitivity of the quark and gluon jets correlators to the value of λ	11
3.5 Extension of the Fong and Webber expansion; its limit $\lambda = 0$	14
3.6 Comparison with the exact solution of the evolution equations: $\lambda = 0$	15
3.7 Comparison with Fong-Webber and LEP-I data; how $\lambda = 0$ is favored	16
4. Conclusion	17
A. Double derivatives and determinant	18
A.1 Demonstration of eq. (2.19)	18
A.2 Det A (see eq. (2.19)) around the maximum	19
A.3 The functions $L(\mu, v)$, $K(\mu, v)$ in eq. (2.26)	19
A.4 A consistency check	19
B. Analytical expression of $\Delta'(\mu_1, \mu_2)$ obtained from eq. (3.10)	21

1. Introduction

Exactly solving the MLLA evolution equations for the quark and gluon inclusive spectra and for 2-particle correlations inside one jet provided, at small x , in [1], analytical expressions for these observables, which were unfortunately limited, for technical reasons to the “limiting spectrum” $\lambda \equiv \ln(Q_0/\Lambda_{\text{QCD}}) = 0$. The goal of this second work is to go

beyond this limit in an approximate scheme which proves very economical and powerful: the steepest descent (SD) method. It offers sizable technical progress in the calculation of both observables.

First, we perform a SD evaluation of the (quark and) gluon single inclusive distributions. Their full dependence on λ is given, including the normalization. The well known shift to smaller values of x of the maximum of the distribution, as compared with DLA calculations is checked, as well as its Gaussian shape around the maximum. Comparison with the results obtained numerically in [2] is done.

As shown in [1], knowing the logarithmic derivatives of the inclusive spectra immediately gives access to 2-particle correlations. This is accordingly our next step. Since, in particular, the former prove to be infra-red stable in the limit $\lambda \rightarrow 0$, the result can be safely compared with the exact one obtained in [1]. The agreement turns out to be excellent, and increases with the energy scale of the process.

Last, we evaluate 2-particle correlations inside one high energy jet and study their behavior at $Q_0 \neq \Lambda_{\text{QCD}}$. That one recovers the results of Fong & Webber [3] close to the peak of the single inclusive distribution and when $\lambda \rightarrow 0$ is an important test of the validity and efficiency of the SD method. The quantitative predictions do not substantially differ from the ones of [1] for the “limiting spectrum”, which stays the best candidate to reproduce experimental results.

A conclusion summarizes the achievements, limitations and expectations of [1] and of the present work. It is completed with two technical appendices.

2. Steepest descent evaluation of the single inclusive distribution

We consider the production of one hadron inside a quark or a gluon jet in a hard process. It carries the fraction x of the total energy E of the jet. Θ_0 is the half opening angle of the jet while Θ is the angle corresponding to the first splitting with energy fraction $x \ll z \ll 1$.

2.1 Variables and kinematics

The variables and kinematics of the process under consideration are the same as in section 3.1 of [1].

2.2 Evolution equations for particle spectra at MLLA

We define like in [1] the logarithmic parton densities

$$Q(\ell) \equiv x D_Q(x), \quad G(\ell) = x D_G(x)$$

for quark and gluon jets in terms of which the system of evolution equations for particle spectra at small x (see eqs. (42) and (43) of [1]) read

$$Q(\ell, y) = \delta(\ell) + \frac{C_F}{N_c} \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' \gamma_0^2(\ell' + y') \left(1 - \frac{3}{4} \delta(\ell' - \ell)\right) G(\ell', y'), \quad (2.1)$$

$$G(\ell, y) = \delta(\ell) + \int_0^\ell d\ell' \int_0^y dy' \gamma_0^2(\ell' + y') \left(1 - a \delta(\ell' - \ell)\right) G(\ell', y'), \quad (2.2)$$

where

$$a = \frac{1}{4N_c} \left[\frac{11}{3} N_c + \frac{4}{3} n_f T_R \left(1 - \frac{2C_F}{N_c} \right) \right] \stackrel{n_f=3}{=} 0.935. \quad (2.3)$$

The terms $\propto \frac{3}{4}$ in (2.1) and $\propto a$ in (2.2) account for hard corrections to soft gluon multiplication, sub-leading $g \rightarrow q\bar{q}$ splittings, strict angular ordering and energy conservation.

2.3 Evolution equations; steepest descent evaluation

The exact solution of (2.2) is demonstrated in [1] to be given by the Mellin's integral representation

$$\begin{aligned} G(\ell, y) &= (\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell + \nu y} \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta} e^{-\lambda s} \\ &= (\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} e^{\omega\ell + \nu y} \int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta} e^{\sigma(s)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

where we have exponentiated the kernel (symmetrical in (ω, ν))

$$\sigma(s) = \frac{1}{\beta(\omega - \nu)} \ln \left(\frac{\omega(\nu + s)}{\nu(\omega + s)} \right) - \lambda s. \quad (2.5)$$

Eq. (2.4) will be estimated by the SD method. The value s_0 of the saddle point, satisfying $\left. \frac{d\sigma(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = 0$, reads (see [7])

$$s_0(\omega, \nu) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{4}{\beta\lambda} + (\omega - \nu)^2} - (\omega + \nu) \right]. \quad (2.6)$$

One makes a Taylor expansion of $\sigma(s)$ nearby s_0 :

$$\sigma(s) = \sigma(s_0) + \frac{1}{2} \sigma''(s_0) (s - s_0)^2 + \mathcal{O}((s - s_0)^3), \quad \sigma''(s_0) = -\beta\lambda^2 \sqrt{\frac{4}{\beta\lambda} + (\omega - \nu)^2} < 0, \quad (2.7)$$

such that

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\nu + s} \left(\frac{\omega(\nu + s)}{(\omega + s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega - \nu)} \left(\frac{\nu}{\nu + s} \right)^{a/\beta} e^{-\lambda s} \stackrel{\lambda \gg 1}{\approx} 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sigma(s_0)}}{(\nu + s_0) \sqrt{|\sigma''(s_0)|}} \left(\frac{\nu}{\nu + s_0} \right)^{a/\beta}. \quad (2.8)$$

The condition $\lambda \gg 1 \Rightarrow \alpha_s/\pi \ll 1$ guarantees, in particular, the convergence of the perturbative approach. Substituting (2.8) in (2.4) yields

$$G(\ell, y) \approx 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\ell + y + \lambda) \iint \frac{d\omega d\nu}{(2\pi i)^2} \frac{e^{\phi(\omega, \nu, \ell, y)}}{(\nu + s_0) \sqrt{|\sigma''(s_0)|}} \left(\frac{\nu}{\nu + s_0} \right)^{a/\beta}, \quad (2.9)$$

where the argument of the exponential is

$$\phi(\omega, \nu, \ell, y) = \omega\ell + \nu y + \frac{1}{\beta(\omega - \nu)} \ln \frac{\omega(\nu + s_0)}{(\omega + s_0)\nu} - \lambda s_0. \quad (2.10)$$

¹in (2.7), λ appears to the power $3/2 > 1$, which guarantees the fast convergence of the SD as λ increases.

Once again, we perform the SD method to evaluate (2.9). The saddle point (ω_0, ν_0) satisfies the equations

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \ell - \frac{1}{\beta (\omega - \nu)^2} \ln \frac{\omega (\nu + s_0)}{(\omega + s_0) \nu} + \frac{1}{\beta \omega (\omega - \nu)} - \lambda \frac{(\nu + s_0)}{(\omega - \nu)} = 0, \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = y + \frac{1}{\beta (\omega - \nu)^2} \ln \frac{\omega (\nu + s_0)}{(\omega + s_0) \nu} - \frac{1}{\beta \nu (\omega - \nu)} + \lambda \frac{(\omega + s_0)}{(\omega - \nu)} = 0. \quad (2.11b)$$

Adding and subtracting (2.11a) and (2.11b) gives respectively

$$\omega_0 \nu_0 = \frac{1}{\beta (\ell + y + \lambda)}, \quad (2.12a)$$

$$y - \ell = \frac{1}{\beta (\omega_0 - \nu_0)} \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\nu_0} \right) - \frac{2}{\beta (\omega_0 - \nu_0)^2} \ln \frac{\omega_0 (\nu_0 + s_0)}{(\omega_0 + s_0) \nu_0} - \lambda \frac{\omega_0 + \nu_0 + 2s_0}{\omega_0 - \nu_0}; \quad (2.12b)$$

(ω_0, ν_0) also satisfies (from (2.6))

$$(\omega_0 + s_0) (\nu_0 + s_0) = \frac{1}{\beta \lambda}. \quad (2.13)$$

One can substitute the expressions (2.11a) and (2.11b) of ℓ and y into (2.10), which yields

$$\varphi \equiv \phi(\omega_0, \nu_0, \ell, y) = \frac{2}{\beta (\omega_0 - \nu_0)} \ln \frac{\omega_0 (\nu_0 + s_0)}{(\omega_0 + s_0) \nu_0}. \quad (2.14)$$

Introducing the variables (μ, v) [7] to parametrize (ω_0, ν_0) through

$$\omega_0 (\nu_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta (\ell + y + \lambda)}} e^{\pm \mu (\ell, y)}, \quad (\omega_0 + s_0) (\nu_0 + s_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta \lambda}} e^{\pm v (\ell, y)}, \quad (2.15)$$

one rewrites (2.14) and (2.12b) respectively in the form

$$\varphi(\mu, v) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\ell + y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v}, \quad (2.16)$$

$$\frac{y - \ell}{y + \ell} = \frac{(\sinh 2\mu - 2\mu) - (\sinh 2v - 2v)}{2 (\sinh^2 \mu - \sinh^2 v)}; \quad (2.17a)$$

moreover, since $\omega_0 - \nu_0 = (\omega_0 - s_0) - (\nu_0 - s_0)$, (μ, v) also satisfy

$$\frac{\sinh v}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sinh \mu}{\sqrt{\ell + y + \lambda}}. \quad (2.17b)$$

Performing a Taylor expansion of $\phi(\omega, \nu, \ell, y)$ around (ω_0, ν_0) , which needs evaluating $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2}$ and $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu}$ (see appendix A.1), treating $(Y + \lambda)$ as a large parameter and making use of (2.15) provides the SD result

$$G(\ell, y) \approx \mathcal{N}(\mu, v, \lambda) \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\ell + y + \lambda} - \sqrt{\lambda} \right) \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} + v - \frac{a}{\beta} (\mu - v) \right], \quad (2.18)$$

where

$$\mathcal{N}(\mu, \nu, \lambda) = \frac{1}{2}(\ell + y + \lambda) \frac{\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{1/4}}{\sqrt{\pi \cosh v \operatorname{Det} A(\mu, \nu)}} \left(\frac{\lambda}{\ell + y + \lambda}\right)^{a/2\beta}$$

with (see details in appendix A.1)

$$\operatorname{Det} A(\mu, \nu) = \beta (\ell + y + \lambda)^3 \left[\frac{(\mu - \nu) \cosh \mu \cosh \nu + \cosh \mu \sinh \nu - \sinh \mu \cosh \nu}{\sinh^3 \mu \cosh \nu} \right]. \quad (2.19)$$

2.3.1 Shape of the spectrum given in eq. (2.18)

We normalize (2.18) by the MLLA mean multiplicity inside one jet [8]

$$\bar{n}(Y) \stackrel{\lambda \gg 1}{\approx} \frac{1}{2} \left(\frac{Y + \lambda}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{a}{\beta} + \frac{1}{4}} \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} (\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda}) \right].$$

The normalized expression for the single inclusive distribution as a function of $\ell = \ln(1/x)$ is accordingly obtained by setting $y = Y - \ell$ in (2.18)

$$\begin{aligned} \frac{G(\ell, Y)}{\bar{n}(Y)} &\approx \sqrt{\frac{\beta^{1/2} (Y + \lambda)^{3/2}}{\pi \cosh v \operatorname{Det} A(\mu, \nu)}} \exp \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} (\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda}) \right] \\ &\times \left(\frac{\mu - \nu}{\sinh \mu - \sinh \nu} - 1 \right) + v - \frac{a}{\beta} (\mu - \nu). \end{aligned} \quad (2.20)$$

One can explicitly verify that (2.20) preserves the position of the maximum [8–10] at

$$\ell_{\max} = \frac{Y}{2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\beta} (\sqrt{Y + \lambda} - \sqrt{\lambda}) > \frac{Y}{2}, \quad (2.21)$$

as well as the gaussian shape of the distribution around (2.21) (see appendix A.2)

$$\frac{G(\ell, Y)}{\bar{n}(Y)} \approx \left(\frac{3}{\pi \sqrt{\beta} [(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{2}{\sqrt{\beta}} \frac{3}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \frac{(\ell - \ell_{\max})^2}{2} \right). \quad (2.22)$$

In figure 1 we compare for $Y = 10$ and $\lambda = 2.5$ the MLLA curve with DLA (by setting $a = 0$ in (2.20)). The general features of the MLLA curve (2.20) at $\lambda \neq 0$ are in good agreement with those of [2].

The shape of the single inclusive spectrum given by (2.20) can easily be proved to be “infrared stable” (it has indeed a final limit when $\lambda \rightarrow 0$).

2.4 Logarithmic derivatives

Their calculation is important since they appear in the expressions of 2-particle correlations.

Exponentiating the (ℓ, y) dependence of the factor \mathcal{N} in (2.18), we decompose the whole expression in two pieces

$$\psi = \varphi + \delta\psi, \quad (2.23)$$

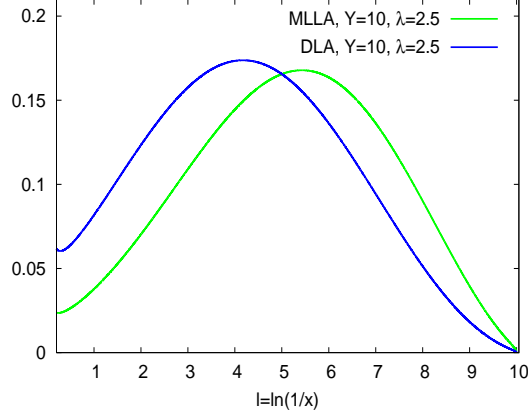


Figure 1: SD normalized spectrum: DLA (blue), MLLA (green); $Y = 10.0$, $\lambda = 2.5$.

where φ , given in (2.16), is the DLA term for the shape of the distribution [7], and

$$\delta\psi = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta}\right) \ln(\ell + y + \lambda) - \frac{a}{\beta} \mu + \left(1 + \frac{a}{\beta}\right) v + \frac{1}{2} \ln[Q(\mu, v)] \quad (2.24)$$

is the sub-leading contribution (in the sense that its derivative gives the MLLA correction), where

$$Q(\mu, v) \equiv \frac{\beta(\ell + y + \lambda)^3}{\cosh v \operatorname{Det} A(\mu, v)} = \frac{\sinh^3 \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}.$$

By the definition of the saddle point, the derivatives of (2.16) over ℓ and y respectively read:

$$\varphi_\ell = \omega_0 = \gamma_0 e^\mu, \quad \varphi_y = \nu_0 = \gamma_0 e^{-\mu}. \quad (2.25)$$

We introduce (see appendix A.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu, v) &= -\frac{a}{\beta} + L(\mu, v), & L(\mu, v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln[Q(\mu, v)], \\ \mathcal{K}(\mu, v) &= 1 + \frac{a}{\beta} + K(\mu, v), & K(\mu, v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \ln[Q(\mu, v)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

and make use of

$$\frac{\partial v}{\partial \ell} = \tanh v \left(\coth \mu \frac{\partial \mu}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \tanh v \left(\coth \mu \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{1}{2} \beta \gamma_0^2 \right),$$

that follows from (2.17b), to write $\delta\psi_\ell$, $\delta\psi_y$ in terms of $\frac{\partial \mu}{\partial \ell}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$

$$\delta\psi_\ell = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta} + \tanh v \mathcal{K}(\mu, v)\right) \beta \gamma_0^2 + \left(\mathcal{L}(\mu, v) + \tanh v \coth \mu \mathcal{K}(\mu, v)\right) \frac{\partial \mu}{\partial \ell}, \quad (2.27a)$$

$$\delta\psi_y = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\beta} + \tanh v \mathcal{K}(\mu, v)\right) \beta \gamma_0^2 + \left(\mathcal{L}(\mu, v) + \tanh v \coth \mu \mathcal{K}(\mu, v)\right) \frac{\partial \mu}{\partial y}. \quad (2.27b)$$

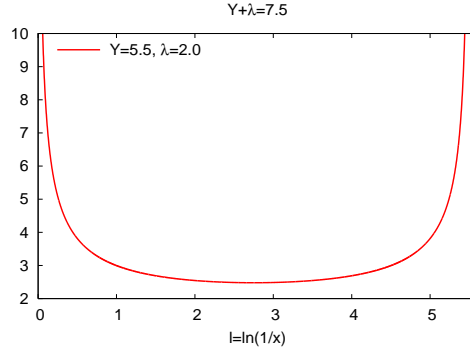


Figure 2: Behavior of $\tilde{Q}(\mu, v)$ as a function of $\ell = \ln(1/x)$.

Using (2.17a) and (2.17b) we obtain

$$\frac{\partial \mu}{\partial \ell} = -\frac{1}{2}\beta\gamma_0^2 \left[1 + e^\mu \tilde{Q}(\mu, v)\right], \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{2}\beta\gamma_0^2 \left[1 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v)\right] \quad (2.28)$$

where

$$\tilde{Q}(\mu, v) = \frac{\cosh \mu \sinh \mu \cosh v - (\mu - v) \cosh v - \sinh v}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}, \quad (2.29)$$

which we have displayed in figure 2 (useful for correlations).

Inserting (2.27b) and (2.28) into (2.27a) gives the SD logarithmic derivatives of the single inclusive distribution

$$\begin{aligned} \psi_\ell(\mu, v) = & \gamma_0 e^\mu + \frac{1}{2}a\gamma_0^2 \left[e^\mu \tilde{Q}(\mu, v) - \tanh v - \tanh v \coth \mu \left(1 + e^\mu \tilde{Q}(\mu, v)\right) \right] \\ & - \frac{1}{2}\beta\gamma_0^2 \left[1 + \tanh v \left(1 + K(\mu, v)\right) + C(\mu, v) \left(1 + e^\mu \tilde{Q}(\mu, v)\right) \right] + \mathcal{O}(\gamma_0^2) \end{aligned} \quad (2.30a)$$

$$\begin{aligned} \psi_y(\mu, v) = & \gamma_0 e^{-\mu} - \frac{1}{2}a\gamma_0^2 \left[2 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v) + \tanh v - \tanh v \coth \mu \left(1 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v)\right) \right] \\ & - \frac{1}{2}\beta\gamma_0^2 \left[1 + \tanh v \left(1 + K(\mu, v)\right) - C(\mu, v) \left(1 + e^{-\mu} \tilde{Q}(\mu, v)\right) \right] + \mathcal{O}(\gamma_0^2) \end{aligned} \quad (2.30b)$$

where we have introduced (L and K have been written in (A.7) and (A.8))

$$C(\mu, v) = L(\mu, v) + \tanh v \coth \mu \left(1 + K(\mu, v)\right). \quad (2.31)$$

C does not diverge when $\mu \sim v \rightarrow 0$. One has indeed

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} [L(\mu, v) + \tanh v \coth \mu K(\mu, v)] = \lim_{\mu, v \rightarrow 0} \frac{2 - 3\frac{v^2}{\mu^2} - \frac{v^3}{\mu^3}}{4 \left(1 - \frac{v^3}{\mu^3}\right)} \mu = 0$$

as well as

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} \tanh v \coth \mu \left(1 + e^{\pm \mu} \tilde{Q}(\mu, v)\right) = \lim_{\mu, v \rightarrow 0} \frac{3\frac{v}{\mu}}{1 - \frac{v^3}{\mu^3}} = \frac{3\sqrt{\frac{\lambda}{Y+\lambda}}}{1 - \left(\frac{\lambda}{Y+\lambda}\right)^{3/2}}.$$

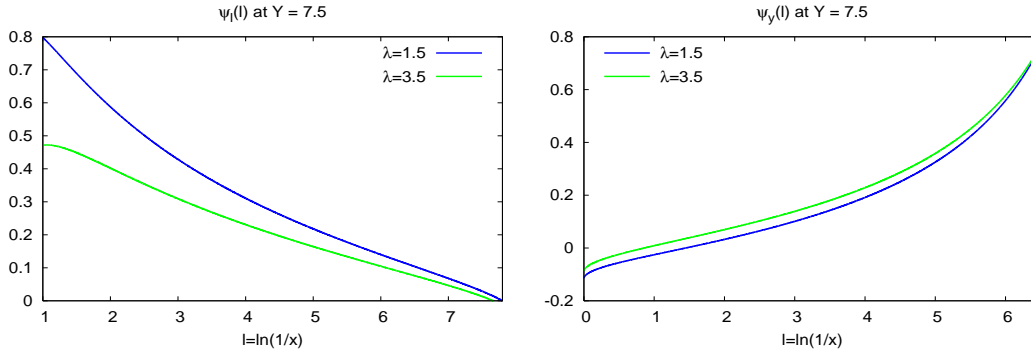


Figure 3: SD logarithmic derivatives ψ_ℓ and ψ_y of the inclusive spectrum at $Y = 7.5$, for $\lambda = 1.5$ and $\lambda = 3.5$.

In (2.30a) and (2.30b) it is easy to keep trace of leading and sub-leading contributions. The first $\mathcal{O}(\gamma_0)$ term is DLA [7] while the second ($\propto a \rightarrow$ “hard corrections”) and third ($\propto \beta \rightarrow$ “running coupling effects”) terms are MLLA corrections ($\mathcal{O}(\gamma_0^2)$), of relative order $\mathcal{O}(\gamma_0)$ with respect to the leading one. In figure 3 we plot (2.30a) (left) and (2.30b) (right) for two different values of λ ; one observes that ψ_ℓ (ψ_y) decreases (increases) when λ increases.

For further use in correlations, the logarithmic derivatives have the important property that they do not depend on the normalization but only on the shape of the single inclusive distribution.

2.4.1 “Limiting spectrum”: $\lambda \rightarrow 0$ ($Q_0 = \Lambda_{\text{QCD}}$)

Since the logarithmic derivatives are “infrared stable” (see above), we can take the limit $\lambda \rightarrow 0$ in (2.30a) (2.30b),² and compare their shapes with the ones obtained in [5]; this is done in figures 4 and 5, at LEP-I energy ($E\Theta_0 = 91.2 \text{ GeV}$, $Y = 5.2$) and at the unrealistic value $Y = 15$.

The agreement between the SD and the exact logarithmic derivatives is seen to be quite good. The small deviations ($\leq 20\%$) that can be observed at large ℓ (the domain we deal with) arise from NMLLA corrections that one does not control in the exact solution. The agreement gets better and better as the energy increases.

It is checked in appendix (A.4) that (2.18) satisfies the evolution equation (2.2); the SD logarithmic derivatives (2.30a) and (2.30b) can therefore be used in the approximate calculation of 2-particle correlations at $\lambda \neq 0$. This is what is done in the next section.

3. 2-Particle correlations inside one jet at $\lambda \neq 0$ ($Q_0 \neq \Lambda_{\text{QCD}}$)

We study the correlation between 2-particles inside one jet of half opening angle Θ within the MLLA accuracy. They have fixed energies $x_1 = \omega_1/E$, $x_2 = \omega_2/E$ ($\omega_1 > \omega_2$) and

²For this purpose, (2.17a) has been numerically inverted.

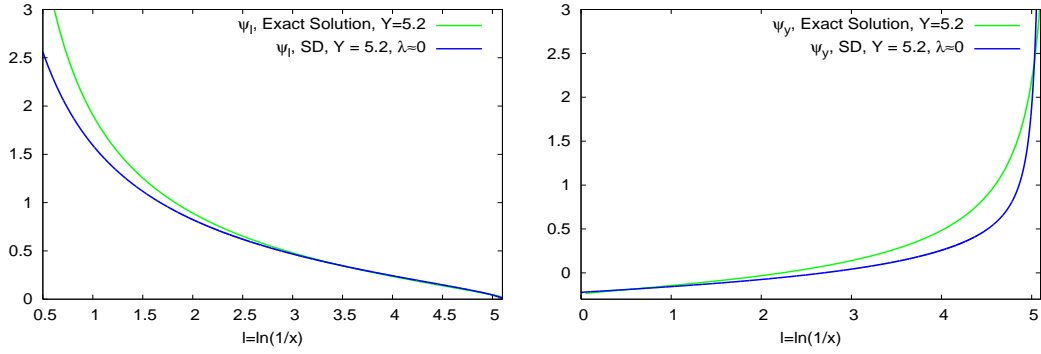


Figure 4: SD logarithmic derivatives ψ_ℓ (left) and ψ_y (right) compared with the ones of [1] at $Y = 5.2$.

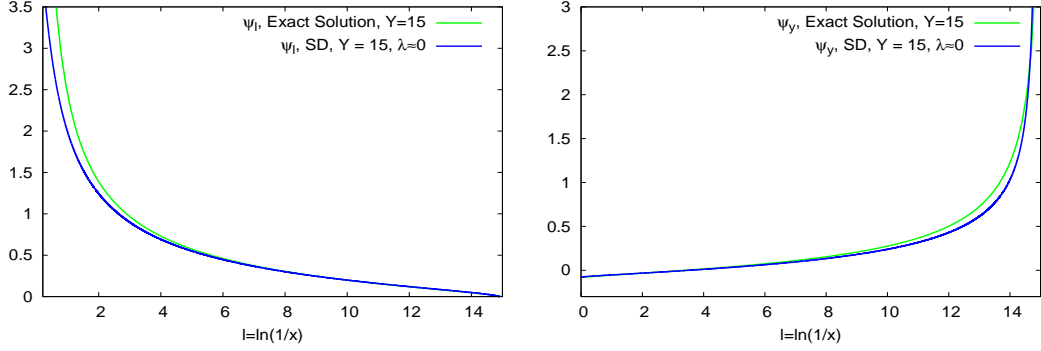


Figure 5: SD logarithmic derivatives ψ_ℓ (left) and ψ_y (right) compared with the ones of [1] at $Y = 15$.

are emitted at arbitrary angles Θ_1, Θ_2 . The constrain $\Theta_1 \geq \Theta_2$ follows from the angular ordering in the cascading process. One has $\Theta \geq \Theta_1$ (see figure 1 of [1]).

3.1 Variables and kinematics

The variables and kinematics of the cascading process are defined like in section 3.2 of [1].

3.2 MLLA evolution equations for correlations

The system of integral evolution equations for the quark and gluon jets two-particle correlation reads (see eqs. (65) and (66) of [1])

$$\begin{aligned}
 Q^{(2)}(\ell_1, y_2, \eta) - Q_1(\ell_1, y_1)Q_2(\ell_2, y_2) &= \frac{C_F}{N_c} \int_0^{\ell_1} d\ell \int_0^{y_2} dy \gamma_0^2(\ell + y) \\
 &\times \left[1 - \frac{3}{4} \delta(\ell - \ell_1) \right] G^{(2)}(\ell, y, \eta), \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(\ell_1, y_2, \eta) - G_1(\ell_1, y_1)G_2(\ell_2, y_2) &= \int_0^{\ell_1} d\ell \int_0^{y_2} dy \gamma_0^2(\ell + y) \left[1 - a\delta(\ell - \ell_1) \right] G^{(2)}(\ell, y, \eta) \\
 &\quad + (a-b) \int_0^{y_2} dy \gamma_0^2(\ell_1 + y) G(\ell_1, y + \eta) G(\ell_1 + \eta, y).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

a is defined in (2.3) while

$$b = \frac{1}{4N_c} \left[\frac{11}{3} N_c - \frac{4}{3} n_f T_R \left(1 - 2 \frac{C_F}{N_c} \right)^2 \right] \stackrel{n_f=3}{=} 0.915. \tag{3.3}$$

3.3 MLLA solution at $\lambda \neq 0$

The quark and gluon jet correlators \mathcal{C}_q and \mathcal{C}_g have been exactly determined for any λ in [1] by respectively setting $Q^{(2)} = \mathcal{C}_q Q_1 Q_2$ and $G^{(2)} = \mathcal{C}_g G_1 G_2$ into (3.1) and (3.2). In the present work we limit ourselves to the exact MLLA solution which consists in neglecting all $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$ corrections in equations (64) and (84) of [1].

3.3.1 Gluon jet

At MLLA, the logarithmic derivatives of ψ (2.23) can be truncated to the saddle point derivatives φ_ℓ, φ_y of (2.16). The MLLA solution of (3.2) then reads (see (77) in [1])

$$\mathcal{C}_g - 1 \stackrel{MLLA}{\approx} \frac{1 - b(\varphi_{1,\ell} + \varphi_{2,\ell}) - \delta_1}{1 + \bar{\Delta} + \Delta' + \delta_1} \tag{3.4}$$

where we introduce

$$\bar{\Delta} = \gamma_0^{-2} \left(\varphi_{1,\ell} \varphi_{2,y} + \varphi_{1,y} \varphi_{2,\ell} \right), \tag{3.5}$$

$$\Delta' = \gamma_0^{-2} \left(\varphi_{1,\ell} \delta\psi_{2,y} + \delta\psi_{1,y} \varphi_{2,\ell} + \delta\psi_{1,\ell} \varphi_{2,y} + \varphi_{1,y} \delta\psi_{2,\ell} \right); \tag{3.6}$$

$$\chi = \ln \left(1 + \frac{1}{1 + \bar{\Delta}} \right), \quad \chi_\ell = \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \ell}, \quad \chi_y = \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial y}; \tag{3.7}$$

$$\delta_1 = \gamma_0^{-2} \left[\chi_\ell (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,y}) + \chi_y (\varphi_{1,\ell} + \varphi_{2,\ell}) \right]. \tag{3.8}$$

(3.5) is obtained by using (2.25):

$$\bar{\Delta}(\mu_1, \mu_2) = 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2) = \mathcal{O}(1), \tag{3.9}$$

which is the DLA contribution [7], while (3.6) (see appendix B) is obtained by using (2.25), (2.27a) and (2.27b)

$$\Delta'(\mu_1, \mu_2) = \frac{e^{-\mu_1} \delta\psi_{2,\ell} + e^{-\mu_2} \delta\psi_{1,\ell} + e^{\mu_1} \delta\psi_{2,y} + e^{\mu_2} \delta\psi_{1,y}}{\gamma_0} = \mathcal{O}(\gamma_0); \tag{3.10}$$

it is a next-to-leading (MLLA) correction. To get (3.7), we first use (3.9), which gives

$$\chi_\ell = - \frac{\tanh \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}}{1 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2)} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \ell} - \frac{\partial \mu_2}{\partial \ell} \right),$$

$$\chi_y = -\frac{\tanh \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}}{1 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2)} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right), \quad (3.11)$$

and then (2.28) to get

$$\begin{aligned} \chi_\ell &= \beta \gamma_0^2 \frac{\tanh \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}}{1 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2)} \frac{e^{\mu_1} \tilde{Q}_1 - e^{\mu_2} \tilde{Q}_2}{2}, \\ \chi_y &= -\beta \gamma_0^2 \frac{\tanh \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}}{1 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2)} \frac{e^{-\mu_1} \tilde{Q}_1 - e^{-\mu_2} \tilde{Q}_2}{2} \end{aligned}$$

which are $\mathcal{O}(\gamma_0^2)$. They should be plugged into (3.8) together with (2.25), which gives

$$\delta_1 = \beta \gamma_0 \frac{2 \sinh^2 \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right)}{3 + 4 \sinh^2 \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right)} \left(\tilde{Q}(\mu_1, v_1) + \tilde{Q}(\mu_2, v_2) \right) = \mathcal{O}(\gamma_0); \quad (3.12)$$

it is also a MLLA term. For $Q \gg Q_0 \geq \Lambda_{\text{QCD}}$ we finally get,

$$\mathcal{C}_g(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) \stackrel{MLLA}{\approx} 1 + \frac{1 - b \gamma_0 (e^{\mu_1} + e^{\mu_2}) - \delta_1}{1 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2) + \Delta'(\mu_1, \mu_2) + \delta_1} \quad (3.13)$$

where the expression for Δ' (B.1) is written in appendix B. It is important to notice that $\delta_1 \simeq 0$ near $\ell_1 \approx \ell_2$ ($\mu_1 \approx \mu_2$) while it is positive and increases as η gets larger (see (2.29) and figure 2); it makes the correlation function narrower in $|\ell_1 - \ell_2|$.

3.3.2 Quark jet

The MLLA solution of (3.1) reads (see (93) in [1])

$$\frac{\mathcal{C}_q - 1}{\mathcal{C}_g - 1} \stackrel{MLLA}{\approx} \frac{N_c}{C_F} \left[1 + (b - a)(\phi_{1,\ell} + \phi_{2,\ell}) \frac{1 + \bar{\Delta}}{2 + \bar{\Delta}} \right] \quad (3.14)$$

Inserting (3.5)–(3.8) into (3.14) we get

$$\mathcal{C}_q(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) \stackrel{MLLA}{\approx} 1 + \frac{N_c}{C_F} \left(\mathcal{C}_g(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) - 1 \right) \left[1 + (b - a) \gamma_0 (e^{\mu_1} + e^{\mu_2}) \frac{1 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2)}{2 + 2 \cosh(\mu_1 - \mu_2)} \right].$$

which finally reduces (for $Q \gg Q_0 \geq \Lambda_{\text{QCD}}$) to

$$\mathcal{C}_q(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) \stackrel{MLLA}{\approx} 1 + \frac{N_c}{C_F} \left[\left(\mathcal{C}_g(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) - 1 \right) + \frac{1}{2} (b - a) \gamma_0 \frac{e^{\mu_1} + e^{\mu_2}}{1 + \cosh(\mu_1 - \mu_2)} \right]. \quad (3.15)$$

3.4 Sensitivity of the quark and gluon jets correlators to the value of λ

Increasing λ translates into taking the limits $\beta, \Lambda_{\text{QCD}} \rightarrow 0$ ($Y = \ell + y \ll \lambda, Q \gg Q_0 \gg \Lambda_{\text{QCD}}$) in the definition of the anomalous dimension via the running coupling constant ($\gamma_0 = \gamma_0(\alpha_s)$, see (44) in [1]). It allows to neglect ℓ, y with respect to λ as follows

$$\gamma_0^2(\ell + y) = \frac{1}{\beta(\ell + y + \lambda)} \stackrel{\ell + y \ll \lambda}{\approx} \gamma_0^2 = \frac{1}{\beta \lambda}, \quad (3.16)$$

such that γ_0 can be taken as a constant. Estimating (2.4) in the region $\lambda \gg 1 \Leftrightarrow s \ll 1$ needs evaluating the kernel

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu+s} \left(\frac{\omega(\nu+s)}{(\omega+s)\nu} \right)^{1/\beta(\omega-\nu)} \left(\frac{\nu}{\nu+s} \right)^{a/\beta} s^{\ll 1} \left(1 + \frac{\omega-\nu}{\omega\nu} s \right)^{1/\beta(\omega-\nu)} \left(1 - \frac{s}{\nu} \right)^{a/\beta} \\ & \approx \frac{1}{\nu} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\omega} - a \right) \frac{s}{\beta} + \frac{1}{2!} \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{\omega} - a \right)^2 \frac{s^2}{\beta^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{\nu^3} \left(\frac{1}{\omega} - a \right)^3 \frac{s^3}{\beta^3} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Integrating (3.17) over s , using (3.16) and $\int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, we get

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\omega, \nu) & \approx \frac{1}{\nu} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\omega} - a \right) \frac{1}{\beta\lambda} + \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{\omega} - a \right)^2 \left(\frac{1}{\beta\lambda} \right)^2 + \frac{1}{\nu^3} \left(\frac{1}{\omega} - a \right)^3 \left(\frac{1}{\beta\lambda} \right)^3 + \dots \right] \\ & = \frac{1}{\nu - \gamma_0^2 (1/\omega - a)}, \end{aligned}$$

which, after inverting the Mellin's representation (132) of [1], gives

$$G(\ell, y) \stackrel{x \ll 1}{\approx} \exp(2\gamma_0 \sqrt{\ell y} - a\gamma_0^2 y). \quad (3.18)$$

Taking the same limit in (2.17a) and (2.17b) gives respectively

$$\frac{y-\ell}{y+\ell} \stackrel{\ell+y \ll \lambda}{\approx} \tanh \mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{\ell}, \quad \mu - v \stackrel{\ell+y \ll \lambda}{\approx} \frac{1}{2} \frac{y-\ell}{\lambda} \Rightarrow \mu \sim v. \quad (3.19)$$

Furthermore, we use (3.19) to show how (2.23) reduces to the exponent in (3.18)³

$$\begin{aligned} \phi & = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \frac{\mu - v}{\sinh \mu - \sinh v} \stackrel{\ell+y \ll \lambda}{\approx} 2\gamma_0 \sqrt{\ell y}, \\ \left(\frac{\nu_0}{\nu_0 + s_0} \right)^{a/\beta} & = -\frac{1}{2} \frac{a}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\ell+y}{\lambda} \right) - \frac{a}{\beta} (\mu - v) \approx -\frac{1}{2} \frac{a}{\beta} \frac{\ell+y}{\lambda} - \frac{a}{\beta} (\mu - v) \\ & \stackrel{\ell+y \ll \lambda}{\approx} -a\gamma_0^2 y. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Thus, since $\mu = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{\ell}$ (3.19), (2.30a) and (2.30b) simplify to

$$\psi_\ell \stackrel{\ell+y \ll \lambda}{\approx} \gamma_0 e^\mu = \gamma_0 \sqrt{\frac{y}{\ell}}, \quad \psi_y \stackrel{\ell+y \ll \lambda}{\approx} \gamma_0 e^{-\mu} - a\gamma_0^2 = \gamma_0 \sqrt{\frac{\ell}{y}} - a\gamma_0^2. \quad (3.21)$$

Therefore, taking the limit $\beta, \Lambda_{\text{QCD}} \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) leads to the simplified model described in section 4.2 of [1]. Setting, for the sake of simplicity, $\ell_1 \approx \ell_2$ in (3.13)(3.14), where δ_1 vanishes, we obtain, in the high energy limit

$$\mathcal{C}_g(\ell, y) \simeq 1 + \frac{1}{3} \left[1 - 2 \left(b - \frac{1}{3} a \right) \psi_\ell(\ell, y) \right], \quad \mathcal{C}_q(\ell, y) \simeq 1 + \frac{N_c}{C_F} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} a + b \right) \psi_\ell(\ell, y) \right], \quad (3.22)$$

³we set $\beta = 0$ in (2.30a), (2.30b) and only consider terms $\propto a$

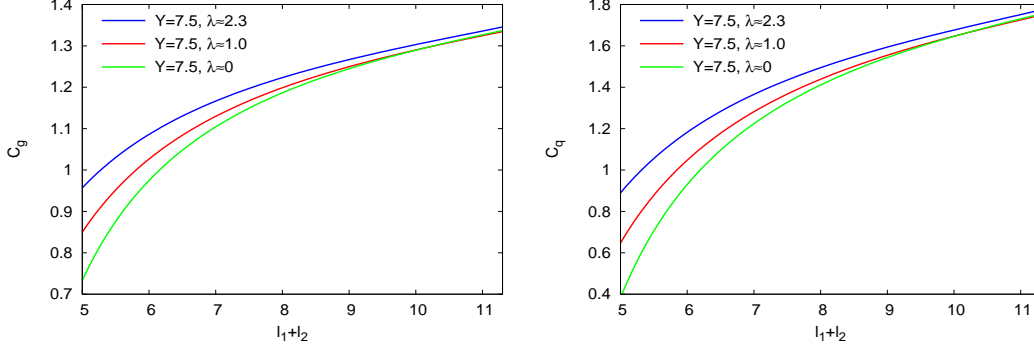


Figure 6: Varying λ at fixed Q_0 ; Λ_{QCD} dependence of C_g (left) and C_q (right)

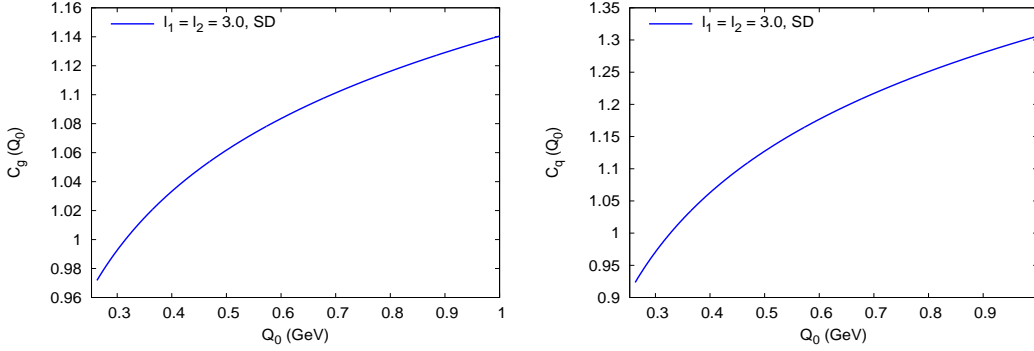


Figure 7: Varying λ at fixed $\Lambda_{\text{QCD}} = 253 \text{ MeV}$; Q_0 -dependence of C_g (left) and C_q (right) at $\ell_1 = \ell_2 = 3.0$

where

$$b - \frac{1}{3}a = \frac{1}{18} \left(11 - 8 \frac{T_R}{N_c} + 28 \frac{T_R}{N_c} \frac{C_F}{N_c} - 24 \frac{T_R}{N_c} \frac{C_F^2}{N_c^2} \right) n_f=3 \approx 0.6,$$

$$\frac{5}{3}a + b = \frac{2}{9} \left(11 + \frac{T_R}{N_c} + \frac{T_R}{N_c} \frac{C_F}{N_c} - 6 \frac{T_R}{N_c} \frac{C_F^2}{N_c^2} \right) n_f=3 \approx 2.5. \quad (3.23)$$

Thus, when λ increases by decreasing Λ_{QCD} , $\psi_\ell \propto \gamma_0$ decreases and the correlators (3.22) increase. For LHC, a typical value is $Y = 7.5$ and we compare in figure 6, at fixed Q_0 , the limiting case $\lambda \approx 0$ ($Q_0 \approx \Lambda_{\text{QCD}} \approx 253 \text{ MeV}$) with $\lambda \approx 1.0$ ($\Lambda_{\text{QCD}} = 100 \text{ MeV}$) and $\lambda \approx 2.3$ ($\Lambda_{\text{QCD}} = 25 \text{ MeV}$). As predicted by (3.22), the correlation increases when $\Lambda_{\text{QCD}} \rightarrow 0$ at fixed Q_0 .

It is also sensitive to the value of Q_0 . As seen in (3.22), since $y = \ln \frac{Q}{Q_0} - \ell$, if one increases Q_0 (since Λ_{QCD} is fixed, γ_0 does not change), thereby reducing the available phase space, the correlators increase. This dependence of the correlators at fixed Λ_{QCD} is displayed in figure 7 for $0.3 \text{ GeV} \leq Q_0 \leq 1.0 \text{ GeV}$ at $\ell_1 = \ell_2 = 3.0$ (soft parton).

In the simplified model which leads to (3.22), \mathcal{C}_g and \mathcal{C}_q respectively go to the asymptotic values $4/3$ and $1 + N_c/3C_F$. This is however not the case in the general situation $\beta \neq 0$, as can be easily checked by using (2.30a) and (2.30b); for example, near the maximum of the distribution ($\mu \sim v \rightarrow 0$), a contribution $\propto \lambda^{3/2}/[(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]$ occurs in the term proportional to β in (3.22) that yields negative values of ψ_ℓ when λ increases.

3.5 Extension of the Fong and Webber expansion; its limit $\lambda = 0$

In the Fong-Webber regime, the energies of the two registered particles stay very close to the peak of the inclusive hump-backed distribution that is, $|\ell_i - \ell_{\max}| \ll \sigma \propto [(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]^{1/2}$ (see (2.22)).

Near the maximum of the single inclusive distribution $\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2$ ($\mu, v \rightarrow 0$, see appendix A.2)

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} C = \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{1/2}, \quad \lim_{\mu, v \rightarrow 0} K_i = \frac{3}{2} \frac{v_i^2}{\mu_i^3 - v_i^3}, \quad \lim_{\mu, v \rightarrow 0} \tilde{Q} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{3/2},$$

where C , K_i and \tilde{Q} are defined in (2.31), (A.8) and (2.29). Keeping only the terms linear in μ and the term quadratic in the difference $(\mu_1 - \mu_2)$, one has

$$\bar{\Delta} + \Delta' \stackrel{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2}{\simeq} 2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 - a\gamma_0(2 + \mu_1 + \mu_2) - \beta\gamma_0 \left[2 + 3 \frac{\lambda^{3/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right] \quad (3.24)$$

and

$$\delta_1 \stackrel{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2}{\simeq} \frac{1}{9} \beta\gamma_0 (\mu_1 - \mu_2)^2 \left[2 + \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda} \right)^{3/2} \right]; \quad (3.25)$$

δ_1 can be neglected, since $\gamma_0(\mu_1 - \mu_2)^2 \ll (\mu_1 - \mu_2)^2 \ll 1$. Then, in the same limit, (3.13), (3.15) become

$$\mathcal{C}_g^0(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) \stackrel{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2}{\simeq} 1 + \frac{1 - b\gamma_0(2 + \mu_1 + \mu_2)}{3 + (\mu_1 - \mu_2)^2 - a\gamma_0(2 + \mu_1 + \mu_2) - \beta\gamma_0 \left[2 + 3 \frac{\lambda^{3/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right]}, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{C}_q^0(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) \stackrel{\ell_1 \sim \ell_2 \simeq Y/2}{\simeq} 1 + \frac{N_c}{C_F} \left[\left(\mathcal{C}_g^0(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) - 1 \right) + \frac{1}{4}(b - a)\gamma_0(2 + \mu_1 + \mu_2) \right]. \quad (3.27)$$

Using (A.4) one has

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 \simeq 9 \frac{Y + \lambda}{[(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]^2} (\ell_1 - \ell_2)^2, \quad \mu_1 + \mu_2 \simeq 3 \frac{(Y + \lambda)^{1/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} [Y - (\ell_1 + \ell_2)]$$

such that the expansion of (3.26), (3.27) in $\gamma_0 \propto \sqrt{\alpha_s}$ reads

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_g^0(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) &\simeq \frac{4}{3} - \left(\frac{(Y + \lambda)^{1/2}(\ell_1 - \ell_2)}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{2}{3} + \frac{(Y + \lambda)^{1/2} Y}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right) \left(\frac{1}{3} a - b \right) \gamma_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda^{3/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right) \beta\gamma_0 \\ &+ \left(b - \frac{1}{3} a \right) \left(\frac{(Y + \lambda)^{1/2}(\ell_1 + \ell_2)}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right) \gamma_0 + \mathcal{O}(\gamma_0^2), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_q^0(\ell_1, \ell_2, Y, \lambda) \simeq & 1 + \frac{N_c}{3C_F} + \frac{N_c}{C_F} \left[- \left(\frac{(Y + \lambda)^{1/2}(\ell_1 - \ell_2)}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right)^2 \right. \\
 & - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} + \frac{(Y + \lambda)^{1/2} Y}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right) \left(\frac{5}{3} a + b \right) \gamma_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda^{3/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right) \beta \gamma_0 \\
 & \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{5}{3} a + b \right) \left(\frac{(Y + \lambda)^{1/2}(\ell_1 + \ell_2)}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \right) \gamma_0 \right] + \mathcal{O}(\gamma_0^2). \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Therefore, near the hump of the single inclusive distribution, (3.13), (3.15) behave as a linear functions of the sum $(\ell_1 + \ell_2)$ and as a quadratic functions of the difference $(\ell_1 - \ell_2)$. At the limit $\lambda = 0$, one recovers the Fong-Webber expression [3].

3.6 Comparison with the exact solution of the evolution equations: $\lambda = 0$

In figures 8 we compare the SD evaluation of the gluon correlator with the exact solution of [1] at $\lambda = 0$. The difference comes from sub-leading corrections of order γ_0^2 that are not present in (3.13). For example, $-\beta\gamma_0^2 \approx -0.2$ at $Y = 5.2$ occurring in the exact solution (69) of [1] is not negligible but is absent in (3.13) and (3.15). That is why, the SD MLLA curve lies slightly above the one of [1] at small $\ell_1 + \ell_2$. The mismatch becomes smaller at $Y = 7.5$, since $-\beta\gamma_0^2 \approx -0.13$. However, when $\ell_1 + \ell_2$ increases, the solution of [1] takes over, which can be explained by comparing the behavior of the SD MLLA δ_1 obtained in (3.12) and $\delta_c, \tilde{\delta}_c$ in [1]. Namely, while δ_1 remains positive and negligible for $\ell_1 \approx \ell_2$, $\delta_c, \tilde{\delta}_c$ decrease and get negative when $\ell_1 + \ell_2 \rightarrow 2Y$, see figure 9 (left), which makes the correlations slightly bigger in this region. As $|\ell_1 - \ell_2|$ increases, δ_1 is seen in figure 9 (right) to play the same role as $\delta_c, \tilde{\delta}_c$ do in the solution [1] and therefore, to decrease the correlation. The agreement between both methods improves as the energy scale increases. A similar behavior holds for the quark correlator.

In [1], strong cancellations between the MLLA δ_1 and the NMLLA δ_2 were seen to take place, giving very small δ_c and $\tilde{\delta}_c$; this eased the convergence of the iterative method but raised questions concerning the relative size of MLLA and NMLLA corrections and the validity of the perturbative expansion. However, since δ_1 is itself, there, entangled with *some* NMLLA corrections, no definitive conclusions could be drawn. The present work and figure 9, by showing that, below, δ_c and $\tilde{\delta}_c$ of [1] play the same role as the *pure MLLA* δ_1 which is now calculated, suggests (though it is not a demonstration) that the perturbative series is safe. It is indeed compatible with the following scheme: in [1], the pure MLLA part of δ_1 is the same as that in the present work; the cancellations in [1] occur between NMLLA corrections included in δ_1 and δ_2 ; these are eventually of the same order of magnitude as MLLA terms, but they are only parts of all NMLLA corrections; this leaves the possibility that the sum of all NMLLA corrections to δ_1 and all NMLLA terms of δ_2 are separately smaller than the pure MLLA terms of δ_1 , that is that strong cancellations occur *between NMLLA corrections*, the ones included, because of the logic of the calculation, in [1], and those which were not be taken into account.

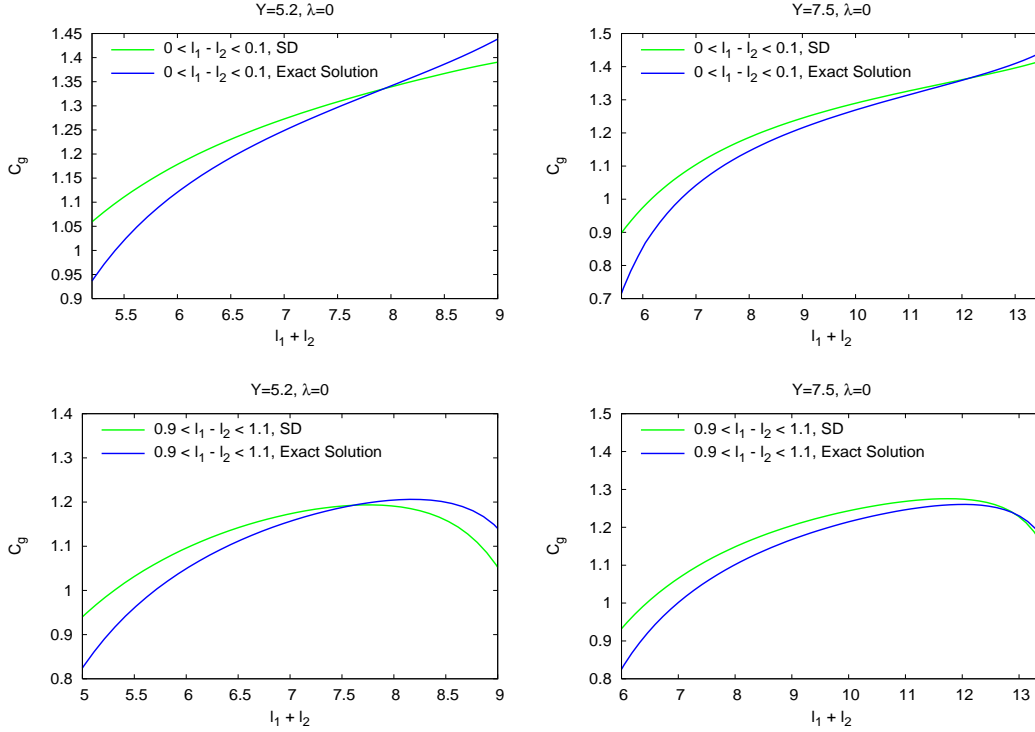


Figure 8: Comparison between correlators given by SD and in [1], at $\lambda = 0$.

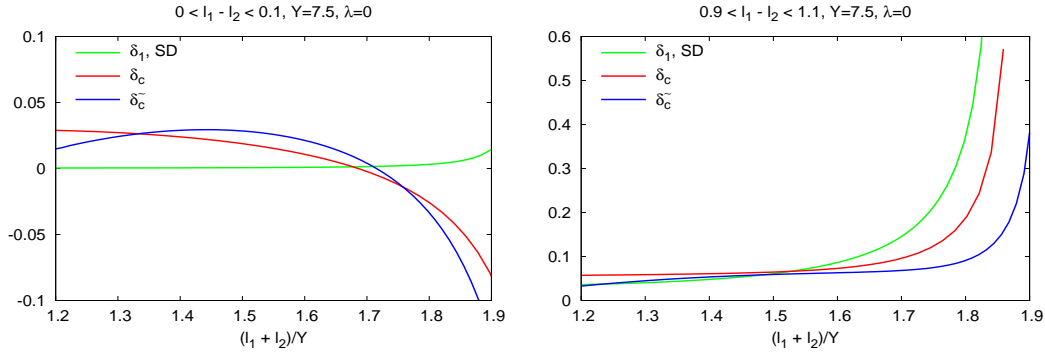


Figure 9: Comparison between the SD δ_1 and $\delta_c, \tilde{\delta}_c$ of [1] at $Y = 7.5, \lambda = 0$.

3.7 Comparison with Fong-Webber and LEP-I data; how $\lambda = 0$ is favored

Let us consider, at the Z^0 peak $Y = 5.2$ ($E\Theta = 91.2$ GeV at LEP-I energy), the process $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. As can be induced from figure 8, the results obtained in the present work by the (approximate) SD method are very close to the ones obtained in subsection 6.5 of [1] by the exact solution of the evolution equations. Accordingly, the same comparison as in [1] holds with respect to both Fong & Webber's results [3] and OPAL data [6].

It is also noticeable that, since, at $\lambda = 0$, correlations already lie above (present) experimental curves, and since an increase of λ tends to increase the predictions, the limiting spectrum stays the best candidate to bring agreement with experiments.

4. Conclusion

Let us, in a few words, summarize the achievements, but also the limitations of the two methods that have been used respectively in [1] (exact solution of MLLA evolution equations) and in the present work (steepest descent approximate evaluation of their solutions).

Achievements are threefold:

- in [1], MLLA evolution equations for 2-particle correlations have been deduced at small x and at any λ ; their (iterative) solution can unfortunately only be expressed analytically at the limit $\lambda \rightarrow 0$;
- by the steepest descent method, which is an approximate method, analytical expressions for the spectrum could instead be obtained for $\lambda \neq 0$, which enabled to calculate the correlation at the same level of generality;
- one could move away from the peak of the inclusive distribution.

So doing, the limitations of the work of Fong & Webber have vanished. Their results have been recovered at the appropriate limits.

The two methods numerically agree remarkably well, despite an unavoidable entanglement of MLLA + some NMLLA corrections in the first one.

The limitations are the following:

- the uncontrollable increase of α_s when one goes to smaller and smaller transverse momenta: improvements in this directions mainly concern the inclusion of non-perturbative contributions;
- departure from the limiting spectrum: it cannot of course appear as a limitation, but we have seen that increasing the value of λ , by increasing the correlations, does not bring better agreement with present data; it confirms thus, at present, that the limiting spectrum is the best possibility;
- the LPHD hypothesis: it works surprisingly well for inclusive distributions; only forthcoming data will assert whether its validity decreases when one studies less inclusive processes (like correlations);
- last, the limitation to small x : it is still quite drastic; departing from this limit most probably lie in the art of numerical calculations, which makes part of forthcoming projects.

Expectations rest on experimental data, which are being collected at the Tevatron, and which will be at LHC. The higher the energy, the safer perturbative QCD is, and the better the agreement should be with our predictions. The remaining disagreement (but

much smaller than Fong-Webber's) between predictions and LEP-1 results for 2-particle correlations stands as an open question concerning the validity of the LPHD hypothesis for these observables which are not “so” inclusive as the distributions studied in [5]. The eventual necessity to include NMLLA corrections can only be decided when new data appear.

Acknowledgments

It is a pleasure to thank Yuri Dokshitzer for enticing me towards the steepest descent method and for showing me its efficiency with simple examples. I am grateful to Bruno Machet for his help and advice and to Gavin Salam for helping me in numerically inverting formula (2.17a).

A. Double derivatives and determinant

A.1 Demonstration of eq. (2.19)

We conveniently rewrite (2.11a) and (2.11b) in the form

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{2\omega - \nu}{\omega - \nu} \ell + \frac{\nu}{\omega - \nu} - \frac{\phi}{\omega - \nu} - \lambda \frac{\nu + 2s_0}{\omega - \nu} + \frac{1}{\beta \omega (\omega - \nu)}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \frac{\omega - 2\nu}{\omega - \nu} y - \frac{\omega}{\omega - \nu} + \frac{\phi}{\omega - \nu} + \lambda \frac{\omega + 2s_0}{\omega - \nu} - \frac{1}{\beta \nu (\omega - \nu)}. \quad (\text{A.2})$$

The Taylor expansion of (2.10) in (2.9) reads

$$\begin{aligned} \phi(\omega, \nu, \ell, y) &\approx \phi(\omega_0, \nu_0, \ell, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} (\omega_0, \nu_0) (\omega - \omega_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} (\omega_0, \nu_0) (\nu - \nu_0)^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu} (\omega_0, \nu_0) (\omega - \omega_0) (\nu - \nu_0). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

The expressions of the second derivatives follow directly from (A.1) and (A.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} &= -\frac{\nu}{(\omega - \nu)^2} (\ell + y + \lambda) + \frac{\phi}{(\omega - \nu)^2} - \frac{2\omega - \nu}{\beta \omega^2 (\omega - \nu)^2} + \frac{4}{\beta (\omega - \nu)^2 (2s_0 + \omega + \nu)}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} &= -\frac{\omega}{(\omega - \nu)^2} (\ell + y + \lambda) + \frac{\phi}{(\omega - \nu)^2} + \frac{\omega - 2\nu}{\beta \nu^2 (\omega - \nu)^2} + \frac{4}{\beta (\omega - \nu)^2 (2s_0 + \omega + \nu)}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu} &= \frac{\omega}{(\omega - \nu)^2} (\ell + y + \lambda) - \frac{\phi}{(\omega - \nu)^2} + \frac{1}{\beta \omega (\omega - \nu)^2} - \frac{4}{\beta (\omega - \nu)^2 (2s_0 + \omega + \nu)}. \end{aligned}$$

Eq. (2.9) and its solution can be written in the form

$$G \simeq \iint d^2 v e^{-\frac{1}{2} v^T A v} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{Det } A}}$$

where

$$v = (\omega, \nu), \quad v^T = \begin{pmatrix} \omega \\ \nu \end{pmatrix}, \quad \text{Det } A = \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu \partial \omega} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \nu} \right)^2.$$

An explicit calculation gives

$$\text{Det } A = (\ell + y + \lambda)^2 \left[\frac{\beta(\omega + \nu)\phi - 4}{(\omega - \nu)^2} + \frac{4(\omega + \nu)}{(\omega - \nu)^2(2s_0 + \omega + \nu)} \right]$$

which, by using (2.15) leads to (2.19).

A.2 Det A (see eq. (2.19)) around the maximum

This is an addendum to subsection 2.3. ℓ_{\max} written in (2.21) is close to the DLA value $Y/2$ [7–9]. We then have $\mu \sim v \rightarrow 0$ for $\ell \approx y \simeq Y/2$. In this limit, (2.17a) and (2.17b) respectively translate into

$$Y - 2\ell \stackrel{\mu, v \rightarrow 0}{\approx} \frac{2}{3} \frac{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}}{(Y + \lambda)^{1/2}} \mu, \quad v \stackrel{\mu, v \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\frac{\lambda}{Y + \lambda}} \mu, \quad (\text{A.4})$$

while

$$\frac{\partial \mu}{\partial \ell} \simeq -3 \frac{(Y + \lambda)^{1/2}}{(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}} \quad (\text{A.5})$$

should be used to get (2.22). An explicit calculation gives

$$\lim_{\mu, v \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\beta^{1/2}(Y + \lambda)^{3/2}}{\pi \text{Det } A(\mu, v)}} = \left(\frac{3}{\pi \sqrt{\beta} [(Y + \lambda)^{3/2} - \lambda^{3/2}]} \right)^{1/2},$$

where

$$\begin{aligned} \text{Det } A \stackrel{\mu, v \rightarrow 0}{\approx} & \beta(Y + \lambda)^3 \frac{(\mu - v) \left(1 + \frac{1}{2}\mu^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\mu^2\right) \left(v + \frac{1}{6}v^3\right) - \left(\mu + \frac{1}{6}\mu^3\right) \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right)}{\mu^3} \\ & \simeq \frac{1}{3} \beta(Y + \lambda)^3 \left(1 - \frac{v^3}{\mu^3}\right) = \frac{1}{3} \beta(Y + \lambda)^3 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{Y + \lambda}\right)^{3/2}\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.3 The functions $L(\mu, v)$, $K(\mu, v)$ in eq. (2.26)

An explicit calculation gives

$$L(\mu, v) = \frac{3 \cosh \mu}{2 \sinh \mu} - \frac{1}{2} \frac{(\mu - v) \cosh v \sinh \mu + \sinh v \sinh \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}, \quad (\text{A.7})$$

and

$$K(\mu, v) = -\frac{1}{2} \sinh v \frac{(\mu - v) \cosh \mu - \sinh \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v}. \quad (\text{A.8})$$

A.4 A consistency check

Let us verify that the evolution equation (2.2) is satisfied by (2.20) within the MLLA accuracy. Differentiating (2.2) with respect to ℓ , y yields the equivalent differential equation

$$G_{\ell y} = \gamma_0^2 (G - aG_\ell) + \mathcal{O}(\gamma_0^4 G)$$

that can be rewritten in the form

$$\psi_\ell \psi_y + \psi_{\ell y} = \gamma_0^2 (1 - a\psi_\ell) + \mathcal{O}(\gamma_0^4); \quad (\text{A.9})$$

we have neglected next-to-MLLA corrections $\mathcal{O}(\gamma_0^4)$ (of relative order γ_0^2) coming from differentiating the coupling γ_0^2 in the sub-leading (“hard correction”) term $\propto a$.

We have to make sure that (A.9) holds including the terms $\mathcal{O}(\gamma_0^3)$. In the sub-leading terms we can set $\psi \rightarrow \varphi$ (see (2.25)):

$$(\varphi_\ell + \delta\psi_\ell)(\varphi_y + \delta\psi_y) + \varphi_{\ell y} = \gamma_0^2(1 - a\varphi_\ell). \quad (\text{A.10})$$

Isolating correction terms and casting them all on the l.h.s. of the equation we get

$$a\gamma_0^2\varphi_\ell + [\varphi_\ell\delta\psi_y + \varphi_y\delta\psi_\ell] + \varphi_{\ell y} = \gamma_0^2 - \varphi_\ell\varphi_y. \quad (\text{A.11})$$

By the definition (2.25) of the saddle point we conclude that the r.h.s. of (A.11) is zero such that we have

$$\omega_0 a\gamma_0^2 + [\omega_0\delta\psi_y + \nu_0\delta\psi_\ell] + \frac{d\omega_0}{dy} = 0, \quad (\text{A.12})$$

that is,

$$\omega_0 (a\gamma_0^2 + \delta\psi_y) + \nu_0\delta\psi_\ell + \frac{d\omega_0}{dy} = 0. \quad (\text{A.13})$$

First, we select the terms $\propto a$:

$$\begin{aligned} & a\gamma_0^3 \left[-\frac{1}{2}\tilde{Q} - \frac{1}{2}\tanh v e^\mu + \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu e^\mu + \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu \tilde{Q} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\tilde{Q} - \frac{1}{2}\tanh v e^{-\mu} - \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu e^{-\mu} - \frac{1}{2}\tanh v \coth \mu \tilde{Q} \right] \\ & = a\gamma_0^3 [-\tanh v \cosh \mu + \tanh v \coth \mu \sinh \mu] \equiv 0. \end{aligned}$$

From (2.15) one deduces

$$\frac{d\omega_0}{dy} = \frac{1}{2}\beta\gamma_0^3\tilde{Q},$$

that is inserted in (A.13) such that, for terms $\propto \beta$, we have

$$\begin{aligned} & -\beta\gamma_0^3 \left[\frac{1}{2}e^\mu + \frac{1}{2}\tanh v(1+K)e^\mu - \frac{1}{2}C e^\mu - \frac{1}{2}C\tilde{Q} + \frac{1}{2}e^{-\mu} + \frac{1}{2}\tanh v(1+K)e^{-\mu} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}C e^{-\mu} + \frac{1}{2}C\tilde{Q} \right] = -\beta\gamma_0^3 \left[\cosh \mu + \tanh v \cosh \mu(1+K) - C \sinh \mu - \frac{1}{2}\tilde{Q} \right], \end{aligned}$$

which gives

$$-\beta\gamma_0^3 \left[\cosh \mu - \sinh \mu L - \frac{1}{2}\tilde{Q} \right].$$

Constructing (see (2.29) and appendix A.3)

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mu, v) - 2 \cosh \mu &= -3 \cosh \mu + \sinh \mu \frac{(\mu - v) \cosh v \sinh \mu + \sinh v \sinh \mu}{(\mu - v) \cosh \mu \cosh v + \cosh \mu \sinh v - \sinh \mu \cosh v} \\ &= -2 \sinh \mu L(\mu, v) \end{aligned}$$

we have

$$-\beta\gamma_0^3 \left[\cosh \mu - \sinh \mu L - \frac{1}{2}\tilde{Q} \right] \equiv 0.$$

B. Analytical expression of $\Delta'(\mu_1, \mu_2)$ obtained from eq. (3.10)

Replacing (2.30a)(2.30b) in (3.10) and neglecting terms of relative order $\mathcal{O}(\gamma_0^3)$ which are beyond the MLLA accuracy, we obtain

$$\begin{aligned}
 \Delta' &= \frac{e^{-\mu_1} \delta\psi_{2,\ell} + e^{-\mu_2} \delta\psi_{1,\ell} + e^{\mu_1} \delta\psi_{2,y} + e^{\mu_2} \delta\psi_{1,y}}{\gamma_0} \\
 &= -a\gamma_0 \left[e^{\mu_1} + e^{\mu_2} - \sinh(\mu_1 - \mu_2)(\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_2) + \cosh \mu_1 \tanh v_2 + \cosh \mu_2 \tanh v_1 \right. \\
 &\quad \left. - \sinh \mu_1 \tanh v_2 \coth \mu_2 - \sinh \mu_2 \tanh v_1 \coth \mu_1 \right. \\
 &\quad \left. + \sinh(\mu_1 - \mu_2) \left(\tanh v_1 \coth \mu_1 \tilde{Q}_1 - \tanh v_2 \coth \mu_2 \tilde{Q}_2 \right) \right] \\
 &\quad - \beta\gamma_0 \left[\left(\cosh \mu_1 - \sinh \mu_1 C_2 \right) + \left(\cosh \mu_2 - \sinh \mu_2 C_1 \right) + \sinh(\mu_1 - \mu_2)(C_1 \tilde{Q}_1 - C_2 \tilde{Q}_2) \right. \\
 &\quad \left. + \cosh \mu_1 \tanh v_2 (1 + K_2) + \cosh \mu_2 \tanh v_1 (1 + K_1) \right]. \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

References

- [1] R. Perez-Ramos, *Two-particle correlations inside one jet at “modified leading logarithmic approximation” of quantum chromodynamics, I. Exact solution of the evolution equations at small x* , *JHEP* **06** (2006) 019 [[hep-ph/0605083](#)] and references therein.
- [2] Y.L. Dokshitzer, V.A. Khoze and S.I. Troyan, *Inclusive particle spectra from QCD cascades*, *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (1992) 1875.
- [3] C.P. Fong and B.R. Webber, *Two particle correlations at small x in QCD jets*, *Phys. Lett. B* **241** (1990) 255; *One and two particle distributions at small x in QCD jets*, *Nucl. Phys. B* **355** (1991) 54.
- [4] Y.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, S.I. Troyan and A.H. Mueller, *QCD coherence in high-energy reactions*, *Rev. Mod. Phys.* **60** (1988) 373.
- [5] R. Perez-Ramos and B. Machet, *MLLA inclusive hadronic distributions inside one jet at high energy colliders*, *JHEP* **04** (2006) 043 [[hep-ph/0512236](#)].
- [6] OPAL collaboration, P.D. Acton et al., *A study of two particle momentum correlations in hadronic Z^0 decays*, *Phys. Lett. B* **287** (1992) 401.
- [7] Y.L. Dokshitzer, V.S. Fadin and V.A. Khoze, *On the sensitivity of the inclusive distributions in parton jets to the coherence effects in QCD gluon cascades*, *Z. Physik C* **18** (1983) 37.
- [8] Y.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, A.H. Mueller and S.I. Troyan, *Basics of Perturbative QCD*, Editions Frontières, Paris 1991.
- [9] V.A. Khoze and W. Ochs, *Perturbative QCD approach to multiparticle production*, *Int. J. Mod. Phys. A* **12** (1997) 2949 [[hep-ph/9701421](#)].
- [10] C.P. Fong and B.R. Webber, *Higher order QCD corrections to hadron energy distributions in jets*, *Phys. Lett. B* **229** (1989) 289.

Références

- [1] M.E. Peskin and D.V. Schoeder, “*An introduction to Quantum Field Theory*”, West-view Press, 1995.
- [2] C. Itzykson and J.B. Zuber, “*Quantum Field Theory*”, Mc Graw-Hill, New York, 1980.
- [3] F. Niedermayer, “*Flux tube or bremsstrahlung*”, Phys. Rev. **34** (1986) 3494.
- [4] Yu.L. Dokshitzer, “*Perturbative QCD for beginners*”, QCD perspectives on hot and dense matter, Cargèse 2001.
- [5] K. Konishi, A. Ukawa, and G. Veneziano, “*Jet calculus : a simple algorithm for resolving QCD jets*”, Nucl. Phys. **B 157** (1979) 45.
- [6] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, A.H. Mueller and S.I. Troyan, “*Basics of Perturbative QCD*”, Editions Frontières, Paris, 1991, et références ci-inclues.
- [7] V.A. Khoze and W. Ochs, “*Perturbative QCD approach to multiparticle production*”, Int. J. Mod. Phys. **A 12** (1997) 2949-3120.
- [8] V.S. Fadin, “*Double logarithmic asymptotic behavior of the cross sections e^+e^- annihilation into quarks and gluons*”, Sov. J. Nucl. Phys. **37** (1983) 245.
- [9] Yu.L. Dokshitzer, V.S. Fadin and V.A. Khoze, “*On the sensitivity of the inclusive distributions in parton jets to the coherent effects in QCD gluon cascades*”, Z. Physik **C 18** (1983) 37.
- [10] V.N. Gribov and L.N. Lipatov : Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 438 and 675 ;
L.N. Lipatov : Sov. J. Nucl. Phys. **20** (1975) 94 ;
A.P. Bukhvostov, L.N. Lipatov and N.P. Popov : Sov. J. Nucl. Phys. **20** (1975) 286 ;
G. Altarelli and G. Parisi : Nucl. Phys. **B 126** (1977) 298 ;
Yu.L. Dokshitzer : Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641.
- [11] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze and S.I. Troyan, “*Inclusive particle spectra from QCD cascades*” Int. J. Mod. Phys. **A 7** (1992) 1875.
- [12] C.P. Fong and B.R. Webber, “*Two-particle correlations at small x in QCD jets*”, Phys. Lett. **B 241** (1990) 255.
- [13] C.P. Fong and B.R. Webber, “*Higher order QCD corrections to hadron energy distributions in jets*”, Phys. Lett. **B 229** (1989) 289.
- [14] OPAL Collab., “*A study of two-particle momentum correlations in hadronic Z^0 decays*”, Phys. Lett. **B 287** (1992) 401.
- [15] F.E. Low, “*Bremsstrahlung of very-energy quanta in elementary particle collisions*”, Phys. Rev. **110** (1958) 974.
- [16] T.H. Burnett and N.M. Kroll, “*Extension of the low soft-photon theorem*”, Phys. Rev. Lett. **20** (1968) 86.
- [17] J.D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, Wiley, New York, 1975.
- [18] A. Laverne, “*Théorie classique des champs*”, [http ://www.imnc.univ-paris7.fr/alain/](http://www.imnc.univ-paris7.fr/alain/).
- [19] M.A. Lavréntiev and B.V. Shabat, “*Métodos de la teoria de las funciones de una variable compleja*”, Editorial Mir, Moscú, 1991.

- [20] T.P. Cheng and L.F. Li, “*Gauge theory of elementary particle physics*”, Clarendon Press, Oxford, 1983.
- [21] Y.L. Dokshitzer, V.A. Khoze and T. Sjostrand, “*Rapidity gaps in Higgs production*”, Phys. Lett. **B 274** (1992) 116.
- [22] A. Bassetto, M. Ciafaloni and G. Marchesini, “*Jet Structure and Infrared Sensitive Quantities in Perturbative QCD*”, Phys. Rep. **C 100** (1983) 201-272.
- [23] Yu.L. Dokshitzer, V.S. Fadin and V.A. Khoze, “*Coherent effects in the perturbative QCD parton jets*”, Phys. Lett. **B 115** (1982) 242.
- [24] Yu.L. Dokshitzer, D.I. Dyakonov and S.I. Troyan, “*Inelastic processes in Quantum Chromodynamics*”, SLAC-TRANS-183, translated from Proceedings of 13th Leningrad Winter School (1978), 1-89 ;
- [25] Yu.L. Dokshitzer and D.I. Dyakonov : “*Quantum Chromodynamics and hadron jets*”, DESY-L-TRANS-234 (Jul 1979). Translated from Proceedings of 14th Leningrad Winter School (1979) p. 27-108 (translation).
- [26] OPAL Collab., M.Z.Akraway *et al.*, “*A study of coherence of soft gluons in hadron jets*”, Phys. Lett. **B 247** (1990) 617.
- [27] TASSO Collab., W. Braunschweig *et al.*, “*Global jet properties at 14-GeV to 44-GeV center-of-mass energy in $e^+ e^-$ annihilation*”, Z. Phys. **C 47** (1990) 187-198.
- [28] E.D. Malaza and B.R. Webber, “*Multiplicity Distributions In Quark And Gluon Jets*”, Nucl. Phys. **B 267** (1986) 702.